

Килыбаев Тимур, Бейганов Батырхан,
Бейганова Амина, Килыбаева Айлин

**INTERNATIONAL MATHEMATICS
AND SCIENCE OLYMPIAD:
ПУТЬ К УСПЕХУ**

Учебное пособие по олимпиадной математике
для учеников начальных классов и среднего звена

Алматы, 2024

УДК 510(075):373

ББК 22.1я72:74.268.21

К33

Рецензенты:

Кунгожин А. М. – PhD по специальности «Математика»,
Мамышев Б. Ж. – Руководитель олимпийского резерва РФМШ,
основатель школы «Clevers»,

Жук В. В. – Кандидат физико - математических наук, тренер
олимпийского резерва Haileybury Almaty

**Килыбаев Тимур, Бейганов Батырхан,
Бейганова Амина, Килыбаева Айлин**

INTERNATIONAL MATHEMATICS AND SCIENCE
OLYMPIAD: ПУТЬ К УСПЕХУ. Учебное пособие по
олимпиадной математике для учеников начальных классов и
среднего звена - Алматы: : Zialy baspasy, 2024 г. – 270 с.

ISBN 978-601-341-845-2

Учебное пособие содержит задания международной олимпиады
IMSO (International Mathematics and Science Olympiad) по
направлению математика. Книга подразделена на самые важные
и часто встречающиеся темы, поэтому сборник будет полезен в
подготовке к олимпиадам районного, областного и
республиканского уровня для учеников начального и среднего
звена. Ко всем заданиям есть полные решения.

ISBN 978-601-341-845-2

© Килыбаев Тимур,
Бейганов Батырхан,
Бейганова Амина,
Килыбаева Айлин, 2024

Оглавление

Предисловие	5
Структура олимпиады IMSO	10
Отзывы и впечатления	13
1. Метод перебора	19
1.1. Простой перебор	20
1.1.1. Примеры	20
1.1.2. Задачи	22
1.2. Задачи с рисунком	30
1.2.1. Примеры	30
1.2.2. Задачи	33
1.3. Задачи со степенями	39
1.3.1. Примеры	39
1.3.2. Задачи	40
2. Признаки делимости	42
2.0.1. Примеры	43
2.0.2. Задачи	45
3. Задачи на составление уравнений	48
3.0.1. Примеры	48
3.0.2. Задачи	50
4. Числовые ребусы	53
4.0.1. Примеры	53

4.0.2. Задачи	55
5. Комбинаторика	59
5.0.1. Примеры	62
5.0.2. Задачи	63
6. Среднее арифметическое значение	68
6.0.1. Примеры	68
6.0.2. Задачи	69
7. Задачи с дробями	71
7.0.1. Примеры	71
7.0.2. Задачи	73
8. Начало геометрии	76
8.1. Задачи на нахождение периметров, площадей фигур	76
8.1.1. Примеры	80
8.1.2. Задачи	82
8.2. Угол, его мера и свойства	94
8.2.1. Примеры	95
8.2.2. Задачи	98
8. 3. Задачи на теорему Пифагора	102
8.3.2. Задачи	103
8.4. Подобие треугольников	105
8.4.1. Примеры	106
8.4.2. Задачи	107
9. Задачи на Исследование	110
10. Ответы к задачам	134
11. Решения задач	141

Предисловие

Дорогие друзья,

Мы рады представить вашему вниманию нашу книгу для подготовки учеников начального и среднего звена к международной олимпиаде IMSO (International Mathematics and Science Olympiad), а также к другим международным, республиканским, областным и районным олимпиадам по математике.

IMSO является престижной олимпиадой для учащихся, не достигших 13 лет, и проводится в двух направлениях: математика и науки. Участниками олимпиады являются ученики, прошедшие национальный отбор в своих странах. Ежегодно в данной олимпиаде принимают участие более 250 учеников из 19 стран мира, включая Китай, Малайзию, США, Сингапур, Индию, Вьетнам, Южную Корею, ОАЭ, Тайвань, Гонконг, Филиппины, Таиланд и другие страны. Каждая страна имеет возможность представить команду, состоящую из 6 учеников по каждому направлению. Олимпиада проводится ежегодно в разных странах и привлекает большое количество одаренных учеников, преподавателей, известных математиков и ученых. Все задачи данной олимпиады являются авторскими и отбираются опытным жюри из огромного пула задач, которые были сформированы странами-участниками. Помимо соревновательного компонента, данное мероприятие является прекрасной возможностью познакомиться с культурой и традициями других стран. В

рамках этого каждая команда представляет свою презентацию о богатом культурном наследии своей страны.

О важности данной олимпиады для отбора и подготовки юных математиков для последующих математических соревнований свидетельствует тот факт, что в США отбор на эту олимпиаду в 2019 году проводился непосредственно при участии Гарвардского университета. На сайте университета имеется информация, что «IMSO предоставляет возможность организации квалификационных раундов и создания программы подготовки. Программа тренировки предоставляет ученикам возможность продолжить обучение и развивать свои продвинутые математические навыки. Это соревнование представляет им обратную связь по их математическому развитию и может быть использована для сравнения с навыками других сверстников. Желание улучшать свои результаты со временем служит сильным мотивационным фактором для студентов, серьезно занимающихся математикой».¹

Ученики из Казахстана стали принимать участие в IMSO с 2013 года. Часть авторов данной книги участвовали в данной олимпиаде в математической секции дважды и в разные года завоёвывали золотые, серебряные и бронзовые медали. Даже в период Covid олимпиада проходила в режиме онлайн и казахстанская команда была сформирована из числа победителей Республиканской Олимпиады для учащихся 5-6 классов, и проводилась под руководством и непосредственной поддержке Республиканского научно-практического центра «Дарын» Министерства просвещения и науки Республики Казахстан. Как показывает опыт школьников из Казахстана, участие на международной олимпиаде такого уровня, несомненно,

¹ <https://Projects.iq.harvard.edu/matholympiad/home>

является бесценным опытом, дает дополнительную мотивацию углублять свои знания в области математики и улучшать свои результаты. В период подготовки к ней есть возможность целенаправленно выявлять свои пробелы, улучшать теоретическую базу, отрабатывать важные навыки по решению творческих задач и правильному управлению времени на олимпиаде. В последующей главе данной книги члены сборной команды Казахстана на IMSO предыдущих лет, некоторые из которых в последующем станут победителями IMO (International Math Olympiad), поделятся своим опытом участия на данной олимпиаде и какой вклад она внесла в их развитие и рост как олимпиадника.

Идея написания этой книги возникла, когда авторы в период подготовки к IMSO столкнулись с полным отсутствием материалов и задач данной олимпиады на русском языке. В свободном доступе отсутствовали и задачи предыдущих лет на английском языке. Учитывая престижность олимпиады, во многих азиатских странах есть практика подготовки к ней на специализированных курсах или при помощи учебных материалов, которые целенаправленно охватывают всю необходимую теоретическую и практическую основу для успешного участия на IMSO. Авторы книги хотели предоставить такие же равные возможности для казахстанских школьников, и на основе своего практического опыта подготовки и участия решили разработать данную книгу, которая основывается на реальных задачах предыдущих лет олимпиады IMSO. Ознакомление с материалами и решениями задач, также поможет школьникам в подготовке к олимпиадам по математике разного уровня, так как охватывает перечень наиболее часто встречающихся тем среднего звена.

Сборник подойдет как центрам подготовки к олимпиадам, школам с углубленным изучением математики, так и

ученикам для самостоятельного изучения, так как все задачи идут с разобранными ответами.

Также после изучения материала сборника есть возможность закрепить свои знания и пройти тесты прошлых лет олимпиады IMSO на английском языке на сайте нашей книги по адресу <https://imso.kz/>, либо перейдя по следующему QR коду:



Здесь можно пройти задания раздела Short на время и после завершения получить результат тестирования. По разделам Essay и Exploration к каждому заданию есть решения для самопроверки. Через этот сайт можно получить обратную связь по вопросам, касающимся задач книги: комментарии, отзывы, предложения. Будем рады ответить на все вопросы.

Авторы данного издания выражают огромную благодарность за знания, вклад в их развитие как олимпиадников, мотивацию и огромную поддержку Мамышеву Бахыту, тренеру олимпийского резерва Республиканской Физико-Математической Школы города Алматы (РФМШ) и директору учебного центра Clevers. Clevers был и останется самым любимым местом, в котором мы не только получили всю необходимую базу для успешного участия на всех олимпиадах, но и центром, где приобрели друзей и научились преодолевать трудности, а также всегда получали необходимую поддержку тренеров.

Составители сборника также выражают благодарность за знания, мотивацию и доброту Данагул Бакытқызы, Айгерім Болатқызы, которые были первыми педагогами в начальных классах.

Большая благодарность Доктору Суну (Тайвань), внесшему значительный вклад в развитие олимпиады IMSO, который поддержал идею создания данной книги и предоставил доступ к материалам олимпиады за предыдущие периоды.

Для нас было большой честью получить рецензию на работу от Кунгожина Алмаза Мухамбетовича, PhD по специальности «Математика», Заместителя Председателя Правления НАО "Республиканская Физико-Математической Школа", в прошлом директора нашей школы РФМШ, который поддерживает учеников в стремлении развиваться в олимпиадном движении.

Хотели поблагодарить за помощь в формулировке задач, оформлении рисунков и формул - Кунгожина Медеубека Аманкельдиевича, руководителя центра олимпийской подготовки «Аль-Фараби», автора большого числа книг по олимпиадной математике.

Так же команда авторов признательна Жуку Владимиру Васильевичу, кандидату физико - математических наук, тренеру олимпийского резерва Haileybury Almaty за рецензию и ценные комментарии по книге.

Хотели также выразить благодарность Республиканскому Научно-Практическому Центру «Дарын» при Министерстве Образования и Науки Республики Казахстан, за предоставленную возможность участия авторам книги в данной олимпиаде в 2020, 2021 годах.

Структура олимпиады IMSO

IMSO, International Math and Science Olympiad, проводится по двум направлениям – по математике и наукам. Ее участниками могут быть школьники, не достигшие 13 лет до ноября текущего года, в котором проводится олимпиада. Хотя нижняя граница по участию не устанавливается, зачастую это ученики 5, 6, 7 классов. Каждая страна – участница представляет сборную команду, состоящую из 6 человек по одному направлению, которые были отобраны в результате нескольких квалификационных раундов. Олимпиада проводится только на английском языке, но участникам, для которых английский не является родным, разрешается использование словаря. Ответы на других языках жюри не принимает к оцениванию. Как и на других олимпиадах, использование других материалов и калькуляторов во время написания работ запрещено.

Данная олимпиада является индивидуальной и состоит из двух частей: теоретической и исследовательской. Предлагаемые задачи составлены на основе учебных программ начальной и первых лет средней школы по математике и науке, и требуют интеллектуального мышления и креативности.

Олимпиада IMISO включает в себя несколько туров:

Тесты	Направление «Математика»	Направление «Наука (Science)»	Продолжи- тельность
Тур 1	Короткие ответы	Теоретическая часть 1	60 минут
Тур 2	Эссе	Теоретическая часть 2	90 минут
Тур 3	Исследова- тельные задачи	Проведение эксперимента	120 минут

По направлению «Математика» первый тур олимпиады «Короткие ответы» состоит из 25 задач, на втором туре «Эссе» на решение предоставляются 12 задач, а на последнем туре предлагаются исследовательские 6 задач, где нужно перечислить все варианты ответов.

По направлению «Математика» задачи зачастую охватывают следующие темы:

1. Арифметика

- Целые числа;
- Рациональные числа и их представления (дроби, десятичные числа и проценты);
- Распознавание шаблонов;
- Множители и кратные;
- Наибольший общий делитель;
- Наименьшее общее кратное;
- Последовательности;
- Отношение и пропорция.

2. Геометрия

- Свойства многоугольников (треугольник, четырехугольник, параллелограмм, трапеция) и окружностей;
- Угол и его измерение;
- Площадь и периметр различных многоугольников;
- Симметрия, отражение и вращение, подобие и пропорция;
- Развороты куба и параллелепипеда;
- Симметрия, отражение и вращение, подобие и пропорция.

3. Данные и измерения

- Представление и интерпретация данных;
- Среднее, медиана и мода набора данных.

Отзывы и впечатления

Олимпиада IMSO для многих участников из Казахстана была первой международной олимпиадой по математике и позволила не только оценить уровень своих знаний по сравнению с лучшими школьниками других стран, но и стала важным «трамплином» для дальнейшего углубления знания в области математики и пробудила интерес в целом к олимпиадному движению. Мы попросили некоторых участников прошлых лет поделиться своим опытом и впечатлениями от участия на IMSO.

“Я участвовал на IMSO в 2013 году, это был первый раз, когда Казахстан участвовал на этой олимпиаде. Соревнование в том году проходило в Филиппинах.

Нельзя сказать, что IMSO это обязательная олимпиада, без которой будет трудно преуспеть, но я считаю это безусловно полезный опыт, который пригодится в дальнейшей олимпиадной карьере. Задачи на олимпиаде интересные, логические, все что нужно для учеников 6-8 классов. Процесс подготовки к олимпиаде сам по себе очень полезен, гораздо сложнее заниматься, не имея опыта в предстоящем важном испытании. Опыт участия на соревновании вдалеке от дома тоже важен - учишься таким вещам как справляться с волнением в незнакомой атмосфере, как правильно спать и есть перед туром. Возможность увидеть другую страну, прочувствовать масштаб и атмосферу олимпиады, несомненно, тоже большой плюс.

Интересная особенность олимпиады заключается в том, что условия задач не переводят на родной язык

участников, а дают в оригинале на английском языке, без возможности использования словаря. Для того чтобы выступить хорошо, нам приходилось тратить достаточно большое количество времени на подтягивание английского. Было нелегко, но в целом мы были готовы, так как условия задач были обычно короткие. Мы написали два тура олимпиады, как и ждали при подготовке, задачи в целом оказались понятные и оставалось ждать результатов. Однако вечером второго дня нам неожиданно сообщили, что завтра будет третий тур олимпиады - никто в команде не знал о его существовании и что в нем ожидать. Сюрприз получился полноценным - помимо неожиданного тура, задачи тура были очень непохожими на первые два. Вместо 20 коротких задач, требовалось решить всего шесть задач, но с очень длинным условием. Насколько я помню, я не понял ни одной из этих задач в тот день, и это конечно отразилось на результате. Самое интересное - после олимпиады мы узнали, что на самом деле пользоваться словарями можно было! Оказалось, что мы неправильно прочитали правила олимпиады, за что и заплатились. В любом случае, при упоминании олимпиады всегда вспоминаю эту ситуацию с улыбкой на лице.

Я желаю молодым олимпиадникам - главное не переставать любить математику. Задачи с каждым годом будут сложнее, будут появляться множество запутанных тем и неприятной теории, но на самом деле все они очень интересные. Если вы будете находить задачи захватывающими, учиться их решать будет гораздо легче. Геометрия, комбинаторика, теория чисел - крутейшие вещи для изучения!”

Асмагуллаев Рахман
Бронзовый призер IMO 2018
(International Math Olympiad),
Software Engineer at Glassdome

“В 2017 году я поехал на олимпиаду в Сингапур. На IMSO было много умных ребят из разных стран и было сложно не нервничать во время олимпиады. Это мне дало опыт участия в международных олимпиадах и в будущих серьезных олимпиадах - помогло чувствовать себя более спокойно и хорошо писать тур. Больше всего в Сингапуре мне запомнилась интересная еда, которая мне не подошла и компания друзей, с которыми я поехал. Многие из них продолжили участия на олимпиадах и мы остались друзьями на долгие годы после этого. Молодым олимпиадникам желаю успехов. Получайте удовольствие от олимпиад и подготовки.”

Райымбек Байшуак
Серебрянный призер IMO 2023
(International Math Olympiad),
студент HKUST (Hong Kong)

“Проходило все это дело в Китае в 2018 году. Естественно, как и на любую другую международную олимпиаду туда проходило множество отборочных этапов, отборы шли с начала учебного года и после формирования финалистов нас отдельно тренировали и готовили к олимпиаде. Сама олимпиада в мой год прошла очень интересно, мы побывали в городах как Ханчжоу и Пекин, увидели китайскую культуру и кухню, а также завоевали 4 бронзовых медалей из 6 участников. Появляется некая мотивация работать дальше, когда видишь свой результат, в особенности видя, что твой труд может привести к различным поездкам и веселым подготовкам. В процессе подготовки, мы не только

готовились к олимпиаде, но и готовили национальный танец по традиции олимпиады. Помимо этого, на самой олимпиаде также есть очень интересная традиция "Обмен" где люди из разных стран меняются сувенирами и контактами. Не бойтесь пробовать, больше работайте, не засиживайтесь на одном уровне так как долго вы на старом опыте не вывезите :). Обращайте внимание на собственные ошибки и исправляйте их. Если это невнимательность, то перечитывайте условие 10 раз. Если это плохое оформление, то оформляйте 3 задачи в день."

Касенова Арай
многократный призер
Республиканских и
Международных Олимпиад, Бронза
на Европейской математической
олимпиаде для девушек EGMO-
2024, 12 класс Haileybury Almaty

“Я участвовал на IMSO дважды: в 2020 (17-ая IMSO, Indonesia) и 2021 (18-ая IMSO, Bogor) годах. Обе олимпиады проходили онлайн. IMSO - на тот момент, когда я участвовал (мне было 10-11 лет), была достаточно крутой на мой взгляд. Ее задачи подойдут для 6-8 классов. Но по мне, один из самых главных плюсов (который я, к несчастью, упустил) - это путешествие в дальние страны: таким образом ты готовишься к дальнейшим заграничным поездкам (РЮО, Респа, JBMO, IMO и др.). На первой моей олимпиаде мне запомнилось много чего, даже если побывать в других странах не получилось. Во-первых, я помню, что за нами смотрел ноутбук, подключённый со всеми оставшимися участниками. Также, хотя я был

предупреждён о третьем раунде с "Exploration" задачами, я не смог решить ни одну из тех задач. Это очень сильно сказалось на моём результате, и я еле-еле смог получить 3 место. На второй же олимпиаде за нами следило сразу несколько ноутбуков в разных углах комнаты (кажется, это было в здании «Дарын»). И хотя результат на второй олимпиаде был лучше первой, я чаще всего вспоминаю именно первую олимпиаду. Самое главное, что я бы хотел когда-либо пожелать юным олимпиадникам (и себе в детстве) - это не переставать интересоваться математикой и помнить, что задачи с каждым годом будут труднее и труднее, но это не повод сдаваться, а наоборот - двигаться дальше, ведь на своём опыте я узнал, что вся красота математики кроется в труде, потраченном на понимание её. Алгебра, теория чисел, комбинаторика, геометрия - вот одни из самых главных тем, которые каждый уважающий себя математик должен узнать и разобраться в ней.”

Бейганов Батырхан
многократный призер Республиканских и
Международных Олимпиад, Золото
на IMSO 2021 и IMC 2023, ученик РФМШ

“Я участвовал на IMSO в 2020 и 2021 годах. Обе олимпиады проходили в режиме онлайн. Задачи на олимпиаде были очень интересными и сложными. В каждом раунде методы и тактики того как решать задачи совершенно разные. В первом туре было 25 задач на короткий ответ, но на их выполнение отводилось всего лишь 60 минут, поэтому надо было делать задачи быстро и аккуратно. Во втором туре можно чуть-чуть посидеть над задачами, но

расписывание решения тоже берет время. Самый интересный лично для меня был третий тур, потому что задачи в нем были непредсказуемые и больше на логику. Данная олимпиада позволила мне больше узнать о разных форматах задач, новые стратегии для их решения, и появилась мотивация работать дальше, когда ты видишь, что это не конец пути. Я хотел бы пожелать начинающим олимпиадникам высыпаться, не волноваться и просто получать удовольствие от решения задач.”

Килыбаев Тимур

многократный призер Республиканских и
Международных Олимпиад, Серебро на IMSO
2020 и IMC 2023, ученик РФМШ

1. Метод перебора

Метод перебора - самый древний и самый простой метод решения задач, в которых искомая величина принимает только целочисленные значения. Наряду с анализом, синтезом, аналогией он является важным инструментом интеллектуальной деятельности. Этот метод очень удобен, когда количество возможных вариантов невелико. Такой перебор легко осуществить вручную.

Сущность этого приёма заключается в проведении определённым образом организованного разбора и анализа всех (или несколько специально выбранных) случаев, которые потенциально возможны в ситуации, описанной в задаче.

Перебор должен иметь системный характер, только тогда он обеспечивает рассмотрение всех возможных случаев и позволяет не только найти решение, но и показать, что других решений нет.

Единственный недостаток перебора - его трудоемкость при большом количестве вариантов. Этот недостаток можно избежать, если правильно организовать перебор и ограничить область исследования.

В настоящее время метод перебора применяется всё чаще в задачах следующего типа:

- 1) задачи на восстановление записей, числовые ребусы;
- 2) задачи на делимость;
- 3) уравнения первой степени с двумя неизвестными в целых числах;
- 4) уравнения степени выше второй с одной неизвестной;
- 5) задачи на последовательности;
- 6) и многих других.

1.1. Простой перебор

1.1.1. Примеры

1. Кармен выбирает четыре различных числа из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, сумма которых равна 11. Чему равно x , если оно наибольшее из выбранных?

Решение: Поскольку Кармен выбирает четыре числа из $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, следовательно, $x \geq 4$. Мы хотим, чтобы x было как можно большим, тогда пусть сумма трех других чисел будет как можно меньшей, то есть $1 + 2 + 3 = 6$. Следовательно, $x = 11 - 6 = 5$.

Ответ: 5.

2. Миссис Сантос пошла на рынок, чтобы купить яблоки. Она купила 100 яблок и разложила их по 6 мешкам. Количество яблок в каждом пакете содержит как минимум цифру 6. Какое количество яблок в каждом пакете?

Решение: Поскольку цифра единиц измерения 100 равна 0, невозможно, чтобы все цифры единиц измерения в этих 6 пакетах были равны 6. Количество яблок в каждом пакете может быть однозначным или двузначным числом. Таким образом, должно быть ровно одно число с цифрой 6 в разряде десятков, а в остальных 5 мешочках все цифры единиц равны 6. Поскольку сумма цифр единиц в остальных 5 мешочках делится на 10, цифра единицы первого мешка равна 0.

Таким образом, в остальных 5 мешках будет 40 яблок. Очевидно, что госпожа Сантос могла сначала положить 30 яблок в 5 мешков, в каждом по 6 яблок, а затем добавить в

один из мешков оставшиеся 10 яблок. Следовательно, количество яблок в 6 мешках равно 60, 16, 6, 6, 6 и 6.

Ответ: 60, 16, 6, 6, 6 и 6.

3. Предположим, что сумма n последовательных целых чисел (включая положительные целые числа, 0 и отрицательные целые числа) равна 55, найдите максимально возможное значение n .

Решение: Пусть первый член последовательных целых чисел равен a , а последний член m . Тогда имеем следующее: $\frac{n}{2}(a + m) = 55$. Обратите внимание, что $a + m$ положительное целое число, то есть: $\frac{n}{2} \leq 55$ и, следовательно, $n \leq 110$. При $n = 110$, a может принимать значение $a = -54$.

Например,

$$(-54) + (-53) + \dots + 0 + 1 + 2 + \dots + 53 + 54 + 55 = 55$$

Ответ: 55.

4. Даты трех воскресений в месяце - все четные числа. Каким днем недели является 28-ой день месяца?

Решение: Очевидно, что в любом месяце может быть максимум 5 воскресений. Поскольку даты трех воскресений в месяце - четные числа, этими воскресеньями должны быть первое, третье и пятое воскресенье. Поскольку между первым и пятым воскресеньем 28 дней, единственными возможными датами, которые удовлетворяют требованиям, являются 2-е, 16-е и 30-е числа. Следовательно, 28-е число - пятница.

Ответ: пятница.

5. Майкл хочет связать 20 веревок длиной 50 см каждая. Учитывая, что 5 см конца каждой веревки привязаны к 5 см конца другой веревки и в результате получается узел длиной 5 см. Какова длина новой веревки в см?

Решение: Так как веревок 20, то их общая длина будет равна 1000 см. Однако некоторые части веревок будут использоваться для завязывания узлов. Значит, новая веревка будет короче общей длины этих веревок. Так как всего веревок 20 и два конца веревки не завязаны, то число завязанных узлов равно $20 - 1 = 19$. Обратите внимание, что на узел было использовано $5 + 5 = 10$ сантиметров веревки, и в результате, получится узел 5 см. Таким образом, новая веревка будет на $19 \times 5 = 95$ см короче общей длины 20 веревок. Следовательно, длина новой веревки равна $1000 - 95 = 905$ см.

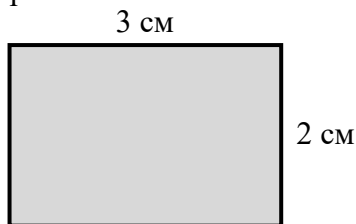
Ответ: 905 см.

1.1.2. Задачи

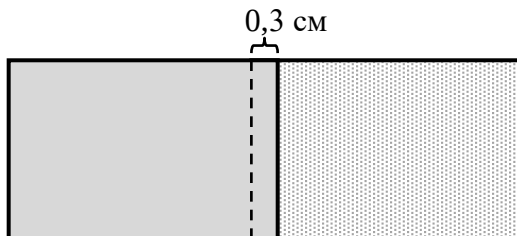
6. Какая цифра стоит в позиции единиц в приведенном ниже выражении:
 $-1 \times 2018 + 2 \times 2017 - 3 \times 2016 + 4 \times 2015 + \dots -$
 $-1003 \times 1016 + 1004 \times 1015?$
7. В ряд выстроено 81 солдат с номерами от 1 до 81. В каждом раунде солдаты называют свой номер 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3,... Все солдаты, посчитавшие 1 и 3, удаляются из строя. Процесс продолжается до тех пор, пока останется только один солдат. Какой номер последнего оставшегося солдата?
8. Чему равна сумма двух последних цифр произведения всех нечетных чисел от 1 до 2019?

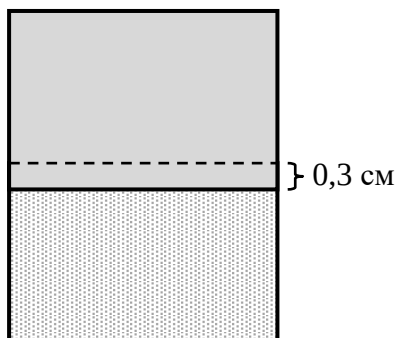
9. Для любого целого положительного числа n мы определяем функцию $f(n)$ как сумму цифр n и количества цифр n . Например, $f(218) = 2 + 1 + 8 + 3 = 14$ (Примечание: первая цифра числа n , считая слева направо, не может быть равна 0). Какова сумма максимального и минимального значений n , при которых $f(n) = 6$?
10. Когда двузначное число делится на сумму своих цифр, каков наибольший возможный остаток?
11. Вычислите $9 + 99 + 999 + 9999 + 99999 + 999999 + 9999999 + 99999999 + 999999999$.
12. Сумма 47 различных целых положительных чисел равна 2015. Какое максимальное количество нечетных чисел может быть?
13. Выпишите шесть натуральных чисел, сумма которых равна 100, таких, что каждое целое число содержит хотя бы одну цифру 6.
14. Два числа называются зеркальными, если одно получается из другого изменением порядка его цифр. Например, таковыми считаются 123 и 321. Если произведение пары зеркальных чисел равно 146047, то чему равна сумма этой пары зеркальных чисел?
15. Из набора чисел от 1 до 99 я выбираю как можно больше различных чисел так, чтобы ни одно подмножество выбранных мною чисел не имело сумму 100. Если я хочу, чтобы сумма всех выбранных мной чисел была как можно большей насколько это возможно, какое наименьшее возможное число я могу выбрать в качестве части подмножества?

16. Можно выразить число по основанию 8. Например, 37 можно записать как $(45)_8$ по основанию 8, потому что $(45)_8 = 4 \times 8 + 5 = 37$. С другой стороны, $(49)_8$ не существует, потому что $4 \times 8 + 9 = 41$ должно быть выражено как $(51)_8$. Пусть $\overline{AB}$ - двузначное простое число в степени основания 10, где $A, B < 8$. Если значение $(\overline{AB})_8$ также является простым числом по основанию 10, то сколько возможных значений $(\overline{AB})_8$ мы можем получить?
17. Четыре кубика с длиной ребра 1 м нужно разрезать на кубики меньшего размера, каждый с длиной ребра 4 см. Если все эти меньшие кубики поставить рядом друг с другом, образуя линию, какую длину в метрах они образуют.
18. Мисс Льен объединила десять прямоугольных карточек размером 2 см х 3 см, чтобы получился прямоугольник большего размера.



Если ширина перекрывающейся части между любыми двумя соседними картами равна 0,3 см (см. схему ниже), какова площадь (в см^2) самого большого прямоугольника, который она может создать?





19. Сумма пяти различных целых положительных чисел равна 364. Если наибольшее целое число равно 95, каково максимально возможное значение наименьшего из этих пяти целых чисел?
20. Палиндром - это число, которое читается одинаково как задом наперед, так и обратно. Одометр автомобиля показал 26962 км. После двух часов езды одометр показал следующий палиндром. Какова была средняя скорость автомобиля в км/ч?
21. Лиса видит пасущегося кролика в 21 метре от своего места. За одну секунду кролик смог пробежать 5 шагов, а лиса - только 3 шага. Известно также, что расстояние, пройденное лисой за 4 шага равно расстоянию, который пробежит кролик за 9 шагов. Если каждый шаг кролика равен 0,6 метра, то сколько секунд понадобится лисе, чтобы поймать кролика?
22. Али живет в Олтоне, а Бен живет в 12 км от него, в Бенбурге. Они хотят поехать в Сентервиль, который находится в 30 км от Олтона и в 20 км от Бенбурга. Бен просит Али взять такси из Олтона в Бенбург, чтобы забрать его, чтобы они вместе поехали в Сентервиль. Стоимость такси 1000 рупий за км. Бен оплачивает часть стоимости

проезда, возникающую из-за дополнительного расстояния, вызванного этим объездом, и поровну делит оставшуюся стоимость с Али. Сколько Бен сэкономит, разделив плату за такси с Али?

23. Из листа длиной 11 см и шириной 2 см вырезаются квадратные куски со стороной 0,5 см. Какое максимальное количество квадратов можно вырезать?
24. Имеется 15 настоящих монет одинакового веса и одна фальшивая монета, которая либо тяжелее, либо легче настоящей монеты. По крайней мере, сколько раз мы должны взвесить на двухчашечных весах, чтобы определить, тяжелее ли фальшивая монета или легче?
25. Кнопка «4» на моем калькуляторе неисправна, поэтому я не могу вводить числа, которые содержат цифру 4, поэтому я не могу ввести вычисление $2 \cdot 14$ и не пытаюсь это сделать. Более того, мой калькулятор также не отображает цифру 4, если 4 является частью ответа, поэтому, например, результат умножения 3 на 18 отображается как 5, а не как 54, а результат умножения 2 на 71 отображается как 12 вместо 142. Если я умножу положительное однозначное число на положительное двузначное число и на калькуляторе отображается 26, перечислите все такие пары чисел, которые я мог бы умножить?
26. Роберт купил две разные свечи. Отношение длины более короткой свечи к более длинной составляет $5 : 7$. Известно, что более длинная свеча, будучи зажженной, полностью сгорит через 3,5 часа, в то время как более короткая свеча, будучи зажженной, полностью сгорит через 5 часов. Если обе свечи зажечь одновременно, то через сколько часов длина двух свечей станет одинаковой?

27. В классе из 25 детей 12 носят очки и 11 носят брекеты. Если 7 носят и очки, и брекеты, то каково число тех, которые не носят ни того, ни другого?
28. В опросе участвовали 100 студентов. 84 сказали, что им нравится играть в теннис, 74 сказали, что им нравится кататься на лыжах, а 62 студента сказали, что им нравится играть в теннис и кататься на лыжах. Сколько студентов не любят играть одновременно в теннис и кататься на лыжах?
29. Мои двенадцатичасовые цифровые часы имеют четыре цифры, две из которых обозначают часы, а две другие - минуты. Минуты отображаются с ведущими 0, а часы - нет. В перевёрнутом виде цифры 0, 1, 2, 5, 6, 8 и 9 читаются как 0, 1, 2, 5, 9, 8 и 6 соответственно. Однажды я сделал телефонный звонок в назначенное время и узнал, что это было слишком рано. Затем я понял, что прочитал время на часах вверх ногами. Если вы знаете, на сколько времени я позвонил раньше, вы будете знать, во сколько я позвонил. Во сколько я должен был позвонить?
30. Мы помещаем 2018 точек в квадрат, затем делим квадрат на треугольники, вершинами которых являются эти 2018 точек и 4 вершины квадрата (то есть всего у нас 2022 точки, которые являются вершинами треугольников). Для каждого треугольника каждая точка является либо одной из его вершин, либо полностью лежит вне треугольника. На сколько треугольников разделен квадрат?
31. Каково максимальное количество цифр, которое можно удалить из 1000—значного номера 20192019...2019, чтобы сумма оставшихся цифр была равна 2019? Каково наибольшее получившееся число?
32. На окружности 1500 красных точек и 513 белых точек. Мы пишем 1 между двумя красными точками, -1 между двумя

белыми точками, и 0 между двумя точками, которые имеют разные цвета. Какова сумма этих 2013 чисел, которые мы написали на этом круге?

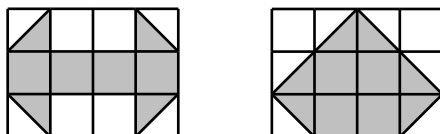
33. 120 скаутов стоят в кругу, на равном расстоянии друг от друга вокруг костра. Они начинают выкрикивать 1, 2, 3, ... по часовой стрелке и Кит называет 55. Если счет начинается с того же человека, но продолжается против часовой стрелки, то какой номер назовет разведчик напротив Кита?
34. Билеты на музыкальное шоу нумеровались последовательно, начиная с 1. Известно, что один номер билета был продан дважды по ошибке, а все остальные номера билетов были проданы ровно один раз. Сумма всех проданных номеров билетов равна 1316. Какой номер билета был продан дважды?
35. Каждая пара из пяти натуральных чисел складывается так, что получается десять сумм: 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 и 121. Какое из этих пяти целых чисел является наибольшим?
36. Дано пятьдесят последовательных нечетных чисел: 1921, 1923, 1925, ..., 2015, 2017, 2019. Каково наименьшее количество чисел, которое нужно выбрать из заданного набора, чтобы убедиться в том, что хотя бы одна пара выбранных чисел в сумме дает 3930?
37. В телешоу 483 серии. Если шоу начинается в субботу и транслируется каждый день по три серии, в какой день будет транслироваться последняя серия?
38. Робот IMSO стоит на средней ячейке платы, как показано на схеме ниже. Он запрограммирован на 5 ходов. Направления ходов чередуются между левым и правым (первый ход может быть в любом направлении). За каждый

41. Трехзначное число умножается на двузначное число, у которого цифра десятков равна 9. Произведением является четырехзначное число, у которого цифра сотен равна 2. Сколько трехзначных чисел удовлетворяют этому условию?

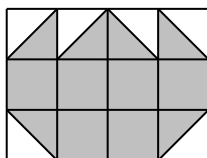
1.2. Задачи с рисунком

1.2.1. Примеры

42. На схеме ниже показаны два разных листа бумаги 3×4 , части которых заштрихованы. Если учащийся объединит обе диаграммы на одном листе бумаги 3×4 , какая часть листа теперь будет закрашена?



Решение:

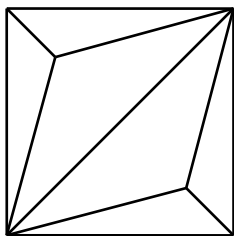


Объединенная диаграмма ученика представлена на схеме сверху. Обратите внимание, что общая заштрихованная площадь составляет 9 квадратных единиц, следовательно, желаемая дробь равна $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

43. Мы хотим разделить квадрат на тупоугольные треугольники так, чтобы каждые два треугольника пересекались по общей вершине, общему ребру или не пересекались. Сколько треугольников у нас может быть?

Решение: Очевидно, что любой такой тупоугольный треугольник не может включать в себя две стороны квадрата, иначе это был бы правильный треугольник. Следовательно, существует не менее четырех тупоугольных треугольников. Если существует ровно четыре тупых треугольника, то внутри квадрата есть точка, которая является общей вершиной некоторых тупых треугольников. Но вокруг точки есть не более трех тупых углов, поэтому внутри квадрата есть как минимум две такие точки, и вокруг каждой из них есть как минимум три тупых угла. Следовательно, существует не менее 6 тупоугольных треугольников. Один из примеров приведен на диаграмме ниже.



Ответ: 6 треугольников.

44. Вокруг квадрата 4×4 выстроено 12 точек, как показано на рисунке ниже. Сколько существует треугольников, вершины которых выбраны из этих точек и, хотя бы один внутренний угол равен 45° ?

$A_6A_8 + A_3$ или A_{11} может образовывать треугольники, у которых один внутренний угол равен 45° .

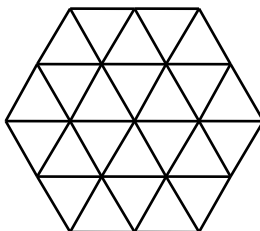
$A_6A_8 + A_7$ может образовать треугольник, у которого два внутренних угла равны 45° .

Итого насчитали: $8 + 2 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 26$ треугольников. Мы также можем найти еще 26 треугольников с другого диагонального направления, итого получаем $26 + 26 = 52$ треугольника и есть последние 8 треугольников: $A_2A_5A_8$, $A_3A_6A_8$, $A_5A_8A_{11}$, $A_6A_9A_{12}$, $A_8A_{11}A_2$, $A_9A_{12}A_3$, $A_{11}A_2A_5$, $A_{12}A_3A_6$, у которых два внутренних угла равны 45° . Следовательно, всего существуют $52 + 8 = 60$ треугольников, у которых хотя бы один внутренний угол равен 45° .

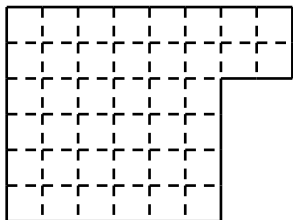
Ответ: 60.

1.2.2. Задачи

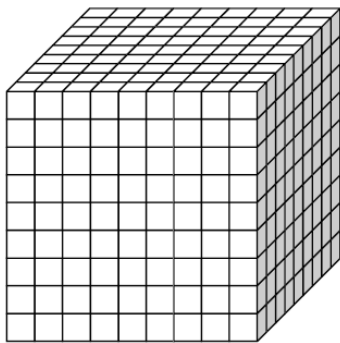
45. Сколько равносторонних треугольников всех возможных размеров и направлений на схеме ниже?



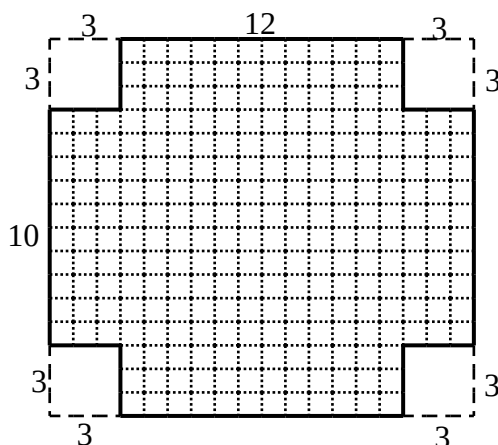
46. Предложите три различных способа разделить приведенную ниже диаграмму на две части, имеющие одинаковую площадь, используя только одну прямую линию.



47. Куб $9 \times 9 \times 9$ образуется из 729 кубиков, каждый размером $1 \times 1 \times 1$. Сколько кубиков разного размера можно найти в кубе $9 \times 9 \times 9$? (Примечание: два кубика одинакового размера, но расположенные в разных местах, должны считаться как два разных кубика)



48. Дан лист бумаги размером 16 на 18 см, с каждого угла отрезается квадрат 3 на 3 см, как показано на схеме ниже. Какое максимальное возможное количество прямоугольников размером 3×4 см можно отрезать от оставшейся части этого листа бумаги?

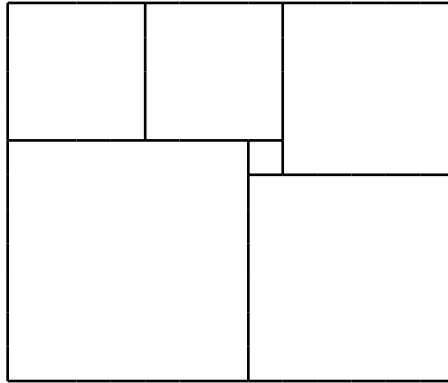


49. Мы хотим провести на шахматной доске такое количество прямых линий, которые должны проходить через внутренние точки всех клеток доски. По крайней мере, сколько линий нам нужно нарисовать на шахматной доске 3×3 ?
50. В таблице ниже, каждая буква обозначает целое число от 1 до 7. При сравнении суммы чисел в любой строке или столбце с суммой чисел в других строках или столбцах эти суммы должны быть одинаковой четности (либо обе четные, либо обе нечетные) и отличаться не более чем на 2. Найдите сумму всех возможных значений a .

a	b	
c	d	e
	f	g

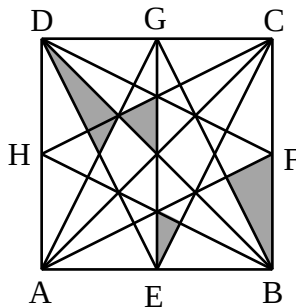
51. Прямоугольник разделен на несколько маленьких квадратов, как показано на схеме ниже. Учитывая, что

длина стороны наименьшего квадрата равна 1 см, каков периметр прямоугольника в см?



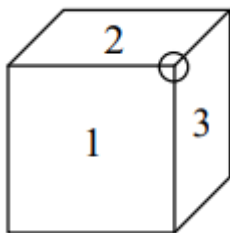
52. У мр. Нама есть 10 кубовидных призм: одна размером 2 см x 2 см x 2 см, три размером 1 см x 1 см x 2 см и шесть размером 1 см x 1 см x 1 см. Он хочет сделать большую кубовидную призму, используя некоторые из них. Какова максимально возможная площадь поверхности (см²) новой кубовидной призмы?

53. Нарисован квадрат ABCD, где E, F, G и H середины каждой из сторон. Чему равна площадь квадрата ABCD, если общая площадь заштрихованной области равна 15 см²?

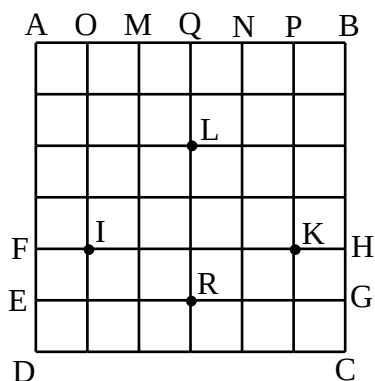


54. На гранях куба записаны числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 так, что сумма чисел на каждой паре противоположных граней равна 7. Для каждого из восьми углов куба мы умножаем три числа на трех гранях, противолежащих этому углу, и запишем его значение.

На рисунке значение указанного угла равно $1 \times 2 \times 3 = 6$.
Чему равна сумма восьми значений, присвоенных углам куба?



55. Мр. Ноби использовал квадратную бумагу в клетку ABCD, как показано на схеме, чтобы сложить конверт.

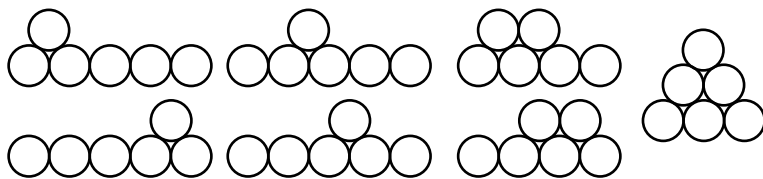


Затем он сложил бумагу по следующей схеме:

- 1) Сложить D к F;
- 2) Сложить E к I и G к K;
- 3) Сложить A к M и B к N;
- 4) Сложить O к L и P к L;
- 5) Сложить Q к R.

Учитывая, что $AB = 12$ см, какова площадь полученного им конверта в см^2 ? Нарисуйте конверт, который он получил.

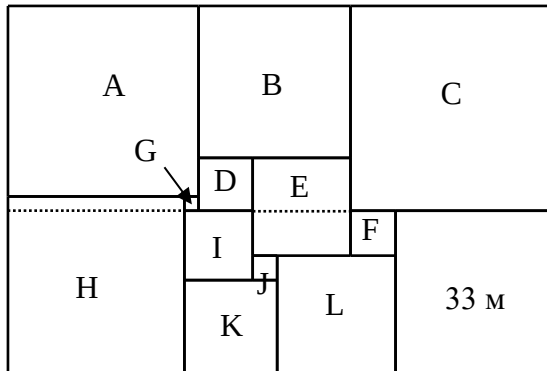
56. Рассмотрим расположение n одинаковых окружностей, без накладки друг на друга, таких, чтобы было не менее двух рядов окружностей. Каждый круг должен касаться следующего в том же ряду, и каждый круг, кроме тех, что находятся в нижнем ряду, должен касаться двух кругов в ряду под ним. Например, существует 7 возможных вариантов расположения для $n = 6$, как показано на диаграмме ниже.



Нарисуйте все возможные варианты расположения кругов для $n = 8$.

57. В одной провинции есть двенадцать дорог, каждая из которых соединяет пару городов. Каждый город расположен на пересечении трех шоссе. Каково число городов в этой провинции?
58. Энди записывает целое положительное число, используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 ровно один раз. Любая последовательность двух соседних цифр в нем образует целое число, которое делится либо на 7, либо на 13. Запишите все возможные последовательности чисел, образованные Энди, удовлетворяющие условиям.
59. Ферма размером 112 на 75 метров разделена на 13 квадратных полей, как показано на схеме ниже. Поле в правом нижнем углу имеет длину стороны 33 метра.

Существует прямой путь, который служит границей для нескольких полей и пересекает два других поля по пунктирным линиям. Какова длина стороны каждого поля в метрах?



1.3. Задачи со степенями

1.3.1. Примеры

60. На свой сороковой день рождения г-жа Шарма дарит подарки своим двум сыновьям, возраст которых представляет собой простые числа. Она дает одному сыну некоторое количество долларов, равное квадрату его возраста, а другому - некоторое количество долларов, равное его возрасту. Если она даст в общей сложности 300 долларов, какова сумма возрастов двух сыновей г-жи Шармы?

Решение: Так как, $289 = 17^2 < 300 < 19^2 = 361$, следовательно, у нее должен быть сын младше 19 лет.

Если возраст одного сына равен 17, то возраст другого сына равен $300 - 289 = 11$, что также является простым числом.

Если возраст сына меньше 17 лет, то возраст другого сына не менее $300 - 169 = 131$, что невозможно, так как возраст его сына должен быть меньше возраста матери.

Итак, сумма возрастов двух сыновей г-жи Шармы равна $17 + 11 = 28$.

Ответ: 28.

61. Какой разряд единиц в следующей сумме:

$$3^{2011} + 4^{2012} + 7^{2013} ?$$

Решение: Обратите внимание, что цифры единиц 3^n расположены в последовательности 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ..., цифры единиц 4^n расположены в последовательности 4, 6, 4, 6, ..., а цифры единиц 7^n находятся в последовательности 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ..., где n — положительные целые числа. Поскольку, $2011 = 4 \times 502 + 3$, $2012 = 2 \times 1006$ и $2013 = 4 \times 503 + 1$, цифра единиц выражения $3^{2011} + 4^{2012} + 7^{2013}$ такая же, как цифра единиц $3^3 + 4^2 + 7^1$, что соответствует сумме $7 + 6 + 7 = 20$. Значит ответ будет 0.

Ответ: 0.

1.3.2. Задачи

62. Анна спрашивает своего учителя, сколько ему лет. Он ответил: «Мой возраст сейчас — квадратное число, но после моего дня рождения он станет простым числом». Если его возраст больше 20, но меньше 65, сколько ему сейчас лет?

63. Произведение двух целых положительных чисел равно 1000000. Ни одно из этих двух чисел не содержит цифры 0. Какова их сумма?
64. У Дженни есть машина, которая может выполнять одно из следующих двух действий на каждом шаге: возведение числа в квадрат или умножение числа на 2. Начиная с цифры 1 через сколько шагов Дженни может получить 2^{2019} ?
65. Найдите все возможные целые положительные упорядоченные тройки (m, n, p) , чтобы $m^2 + n^2 = p^2$, где p - простое число, $p^2 < 200$ и $m < n$.
66. Найдите все положительные целые числа $n! + 2019$, которые являются точным квадратом (где $n!$ обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n).
67. Первые четыре цифры восьмизначного совершенного квадрата равны 2012. Найдите его квадратный корень.
68. Какая последняя цифра у данного выражения:

$$12^{2018} + 14^{2018} + 16^{2018} + 18^{2018} + 20^{2018} + \dots + 2014^{2018} + 2016^{2018} + 2018^{2018} ?$$

2. Признаки делимости

Признаки делимости - особенности чисел, которые помогают быстро определить, делится ли данное число на другое. Знание этих признаков необходимо при решении многих арифметических задач.

Признаки делимости		Примеры
на 2	последняя цифра чётная	118, 642
на 3	сумма его цифр делится на 3	126, 471
на 4	число, составленное его двумя последними цифрами, делится на 4	764, 892
на 5	оканчивается на цифру 5 или 0	695, 790
на 7	при вычитании удвоенной последней цифры из этого числа, взятого без последней цифры, результат делится на 7	112 → $11 - 2 \cdot 2 = 7$
	если знаочередующаяся сумма его трёхзначных граней делится на 7. Трёхзначные грани числа — это числа, которые получены разбиением исходного числа на трёхзначные числа.	2665068 → 2, 665, 068 → $2 - 665 + 68 = -595$, $595 : 7$
на 9	когда сумма его цифр делится на 9	675, 972
на 11	разность между суммой его цифр, стоящих на чётных местах и суммой его цифр, стоящих на нечётных местах, делится на 11	4865784, 87131

Для случаев с большим значением делителя, используют признаки делимости на составные произведения этого числа. К примеру, для того чтобы понять делится ли число на 15, которое равно произведению 3×5 , нужно чтобы оно удовлетворяло признаку делимости на 3 и на 5 одновременно. Если проверяем делимость на $99 = 9 \times 11$, то тут должно исполняться условия делимости на 9 и 11.

2.0.1. Примеры

69. Мы знаем, что 0, 2, 4, 6 и 8 — четные цифры. Сколько четных цифр используется от 1 до 100?

Решение: В числах от 1 до 9 используются 4 четные цифры. Из набора чисел, а именно: от 10 до 19, от 30 до 39, от 50 до 59, от 70 до 79 и от 90 до 99, в каждом наборе используются по 5 четных цифр.

Из набора чисел, а именно: от 20 до 29, от 40 до 49, от 60 до 69 и от 80 до 89, в каждом наборе используется по 15 четных цифр.

Для числа 100 используются 2 четные цифры.

Следовательно, используется следующее количество четных цифр $4 + 5 \times 5 + 15 \times 4 + 2 = 91$.

Ответ: 91.

70. Произведением 1110, 1111, 1112 и 1113 является тринадцатизначное число 152628x755760 с одной цифрой, замененной на x. Каково значение x?

Решение: Так как 1111 делится на 11, то произведение делится на 11.

Это означает, что по признаку делимости на 11 разность сумм цифр на четной и сумм на нечётных позициях должна делиться на 11:

$$0 - 6 + 7 - 5 + 5 - 7 + x - 8 + 2 - 6 + 2 - 5 + 1 = x - 20$$

Поскольку x – однозначная цифра, она должна быть равна 9, так как $20 - 9 = 11$.

Ответ: 9.

71. Если восьмизначное число $\overline{2018MN28}$ разделить на 7, то остаток будет равен 5. Если то же восьмизначное число разделить на 11, то остаток будет равен 9. Найдите наибольшее возможное значение двузначного $\overline{MN}$.

Решение: Поскольку при делении $\overline{2018MN28}$ на 7 получается остаток 5, то $\overline{2018MN23}$ делится на 7. Тогда $\overline{N23} - \overline{18M} + 20 = 100N - M - 137$ должен делиться на 7. Ключевой номер при делении на 7 равен $[1, 3, 2, -1, -3, -2]$, при использовании метода ключевого числа следует:

$$1 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times N + (-1) \times M + (-3) \times 8 + (-2) \times 1 + 1 \times 0 + 3 \times 2 \text{ должно делиться на } 7.$$

Тогда $2N - M - 11$ и $2N - M - 4$ оба делятся на 7.

Так как,

$$-13 = 2 \times 0 - 9 - 4 \leq 2N - M - 4 \leq 2 \times 9 - 0 - 4 = 14$$

имеем $2N - M - 4 = -7, 0, 7$ или 14 , то есть $2N - M = -3, 4, 11$ или 18 соответственно.

Используя те же рассуждения, $\overline{2018MN19}$ делится на 11. Тогда $2 + 1 + M + 1 - 0 - 8 - N - 9$ делится на 11.

Тогда $M - N - 13$ и $M - N - 2$ делится на 11.

Поскольку, $-11 = 0 - 9 - 2 \leq M - N - 2 \leq 9 - 0 - 2 = 7$ имеем $M - N - 2 = -11$ или 0 , то есть $M - N = -9$ или 2 соответственно.

Если сложить два уравнения, возможные значения N составят 6 или 9. Когда $N = 6$, $M = 8$ и когда $N = 9$, $M = 0$. Следовательно, максимально возможное значение двузначного числа $\overline{MN}$ равно 86.

Ответ: 86.

2.0.2. Задачи

72. Найдите наименьшее число, кратное 9, которое не делится на сумму его цифр.
73. Двузначное нечетное число кратно 9. Произведение его цифр также кратно 9. Какое это число?
74. В многозначном положительном целом числе, кратном 7, каждая цифра, кроме цифры единицы, равна 6. Перечислите все возможные значения его цифр в разряде единиц.
75. Сколько существует целых натуральных чисел меньше 2014, сумма цифр которых кратна 5?
76. Какова сумма всех кратных 6 чисел, каждое из которых имеет ровно десять положительных делителей?
77. Каково наименьшее целое положительное число, при делении которого на 5, 7 и 9 получается остаток 3, 4 и 5 соответственно?
78. Чему равен остаток от деления $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 14 \times 15$ на $1 + 2 + 3 + \dots + 14 + 15$?
79. Известно, что $\overline{240a84} \times 243 = \overline{56b90256}$. Оцени значение $a + b$?

80. Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 ровно один раз, найдите наименьшее девятизначное число, которое делится на 99.
81. Пусть a, b и c - разные цифры. Произведение трехзначных чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ представляет собой девятизначное число, первая цифра которого равна 2, а последняя цифра - 9. Найдите это произведение.
82. Дана последовательность 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, ..., где n -й член после 3-го является суммой трех предыдущих членов. Например, 4-й член равен $1 + 1 + 1 = 3$, а 5-й член равен $1 + 1 + 3 = 5$. Какой остаток получается при делении 2018-го члена на 8?
83. 2014 - значное число — это наименьшее целое положительное число, такое, что при умножении его на 3 каждая цифра произведения становится четной. Сколько раз в исходном числе встречается цифра 3?
84. Сколько будет натуральных чисел в промежутке от 1 до 2015, которые не делятся ни на одно из следующих чисел: 2, 20, 201 и 2015?
85. Рассмотрим следующие числа $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, 29 \times 30$. Сколько из них делятся на 3 или 5?
86. Число $\overline{abcab}$ кратно 7, $\overline{abc}$ кратно 9 и $\overline{cba}$ кратно 4. Найдите наименьшее возможное значение $a \times b \times c$.
87. Пусть A, B, C и D — четыре различных натуральных числа, такие, что сумма любых двух делится на 2, а сумма любых трёх делится на 3. Каково минимальное значение суммы $A + B + C + D$?

88. Сегодня собрание трёх комитетов. Один из них собирается каждые 11 дней, второй — каждые 15 дней, а третий - каждый 21 день. Сколько дней пройдет с сегодняшнего дня, пока они все не встретятся опять в один день?
89. Когда мой возраст делится на 2, 3, 4 или 6, всегда остается остаток 1, но, когда он делится на 7, остатка нет. Сколько мне лет, если мой возраст меньше 100?
90. Санный получил от отца три коробки, в которых было некоторое количество шариков. Его отец сказал, что количество шариков в первой, второй и третьей коробках - это три последовательных целых числа в порядке возрастания, которые делятся на 5, 7 и 9 соответственно. Каково минимальное общее количество шариков в трех коробках?
91. Целое положительное число n делится на четыре из множества чисел 2, 3, 4, 5, 6 и 7, но не делится на два других. Если два числа, которые не делятся на n - последовательные, то каково наименьшее значение n ?
92. По кругу расположены 100 тарелок. Сюзен, обходя круг, кладет конфету на каждую 15 - ю тарелку. Если она будет продолжать это делать до тех пор, пока конфеты не перестанут попадать на пустую тарелку, сколько тарелок останется пустыми?
93. Если из трехзначного числа x вычесть 7, то результат будет кратен 7. Если из x вычесть 8, то результат будет кратным 8. Если из x вычесть 9, то результат будет кратен 9. Когда x делится на 10, какой остаток получается?

3. Задачи на составление уравнений

Данный тип задач сводится к 3 этапам:

- 1) Составление математической модели (составление уравнения/выражения по условию задачи, введение неизвестной).
- 2) Работа с математической моделью (решение уравнения).
- 3) Ответ на вопрос задачи.

Для составления математической модели нужно провести анализ задачи, результаты которого можно оформить в виде таблицы, схемы, рисунка, краткой записи. Зачастую, неизвестной переменной обозначают искомую в задаче величину.

3.0.1. Примеры

94. Ненулевое число делится пополам и результат возводится в квадрат. Это дает число, в два раза превышающее исходное число. Чему равно исходное число?

Решение: Пусть a – это искомое число. Тогда в результате описанных в задаче манипуляций получим $\frac{a^2}{4}$, что в 2 раза больше исходного – a . Составляем следующее уравнение $\frac{a^2}{4} = 2 \times a$. Решая его, получаем $a = 8$.

Ответ: 8.

95. Продавец продавал 80% всех своих ваз для цветов с прибылью в 30%. Затем, проверив, он увидел, что 17 ваз разбиты и не могут быть проданы. Все оставшиеся вазы он продал с убытком в 10%. В итоге продавец получил общую прибыль в размере 5%. Сколько ваз у него было вначале?

Решение: Пусть n — количество ваз, а стоимость одной вазы равна 1 единице. Тогда общая стоимость равна n единиц. Так как 80% ваз продавались по цене 1,3 за штуку, а остальные вазы по цене 0,9 за единицу товара, то получаем: $0,8n \times 1,3 + (0,2n - 17) \times 0,9 = 1,05 \times n$ или $n = 90$.

Ответ: 90.

96. Если у Алисы и Брайана всего 377 карточек, у Брайана и Колина — 685 карт, а у Колина и Алисы — 546 карточек, то сколько карточек у Брайана?

Решение: Обозначим через A , B , C количество карточек у Алисы, Брайана и Колина соответственно. Составив уравнения, по условию задачи, получаем:

$$\begin{cases} A + B = 377 & (1) \\ B + C = 685 & (2) \\ A + C = 546 & (3) \end{cases}$$

Сложив (1) и (2) уравнения получаем

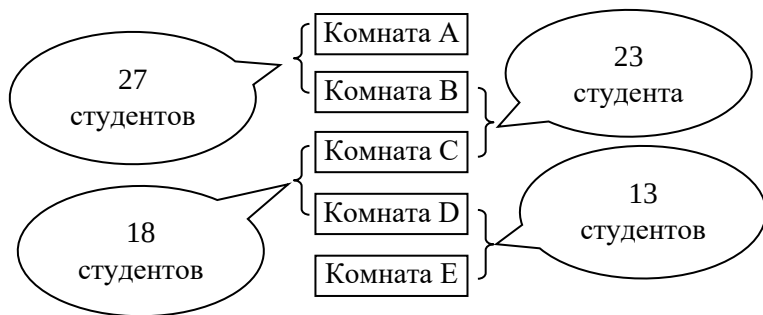
$$A + 2B + C = 1062 \quad (4)$$

Вычитая (3) из (4) получаем $2B = 1062 - 546 = 516$, следовательно, у Брайана 258 карт.

Ответ: 258 карт.

3.0.2. Задачи

97. Сумма чисел А, В и С равна 390. Учитывая, что А в 3 раза больше В, и А составляет одну треть С, найдите значение С.
98. Два года назад Стиву было в три раза больше лет, чем Биллу, а через три года он будет вдвое старше Билла. Найдите сумму их возрастов сейчас.
99. Компания «Коко» имеет несколько действующих автомобилей. Налог на первый автомобиль составляет \$2000, налог на второй автомобиль на 5% больше, чем налог на первый автомобиль, налог на третий автомобиль на 10% больше, чем налог на первый автомобиль, а налог на остальные автомобили на 15% больше, чем налог на первый автомобиль. Если компания платит налог в размере \$15500 за все свои автомобили. Сколько автомобилей имеет компания?
100. В летнем лагере было 50 студентов и их распределили по пяти комнатам. Детали указаны на схеме ниже:



Сколько студентов было в каждой комнате?

101. Пусть $\square$ и $\triangle$ - два различных положительных целых числа, таких что $\square - \triangle = 2013$ и $\frac{\square}{\triangle} = \frac{\square - \triangle - 669}{\square - \triangle - 2011}$. Каково значение $\square$?
102. Участник А предлагает интернет - услугу с первоначальным платежом в размере 300000 рупий и ежемесячной платой в размере 72000 рупий, в то время как компания В предлагает ту же интернет-услугу без первоначального платежа, но имеет ежемесячную плату в размере 90000 рупий. Если Джонни предпочитает компанию А, на какое минимальное количество месяцев ему следует подписаться на компанию А, чтобы он платил меньше, чем за подписку на компанию В?
103. Группа студентов отправилась на экскурсию на автобусе. В каждом автобусе одинаковое количество студентов и все места были заняты. Но по дороге один автобус сломался. Затем студентов равномерно распределили по оставшимся автобусам и в каждом автобусе должны были стоять по 4 студента. По дороге домой сломались еще два автобуса, поэтому поездку закончили с 18 студентами в каждом автобусе. Сколько студентов было в этой поездке?
104. В магазине были проданы две разные рубашки по одной и той же цене. В то время как одна рубашка принесла прибыль в размере 30%, магазин понес убыток в размере 30% от продажи другой. Зафиксировал ли магазин прибыль или убыток от этих двух операций и на сколько процентов?
105. Холли зарабатывает 67510 рупий в час, а Молли — 32490 рупий в час. Вместе они заработали в общей сложности 267510 рупий. Если бы Холли отработала столько же часов, сколько Молли, а Молли отработала столько же часов, сколько Холли, их совокупный заработок составил бы 232490 рупий. Сколько часов Холли и Молли работали индивидуально?

106. У Алисы и Брайана есть по некоторому количеству коров. Алиса говорит Брайану: «Если я добавлю в три раза больше коров, чем у тебя есть, то я буду довольна». Брайан отвечает: «Если я добавлю к моей добыче в пять раз больше коров, чем у тебя, то я буду удовлетворен». Если количество коров, которое их удовлетворяет, одинаково, каково минимальное значение этого числа?

107. Разделите 108 учащихся на четыре группы так, чтобы число учащихся в первой группе в два раза превышало:

- половину числа учащихся второй группы;
- на 2 меньше числа учащихся в третьей группе;
- на 2 больше, чем количество учащихся в четвертой группе.

Найдите количество учеников в первой группе.

108. В трех контейнерах А, В и С содержится в общей сложности 48 яблок. Сначала из А берут 6 яблок и кладут в В. Затем, из В берут 9 яблок и кладут в С. Теперь в каждом контейнере одинаковое количество яблок. Какое первоначальное количество яблок было в контейнере А?

109. В комнате 23 ученика. Их возраст составляет 10, 11, 12 или 13 лет, и есть по крайней мере один ученик каждого возраста. Известно, что их общий возраст составляет 253 года, а 12 - летних учеников в 1,5 раза больше, чем 13-летних. Сколько там 10 - летних учеников?

4. Числовые ребусы

К такому виду задач относятся математические выражения (обычно простое равенство), в котором все или часть цифр заменены на некоторые значки (буквы, звездочки и т.д.). Требуется вместо каждого значка подставить нужную цифру, чтобы выражение было верным.

Есть несколько общих правил:

- если в математическом ребусе используются несколько букв, и найдено соответствие между какой-то буквой и цифрой, то другие буквы эту же цифру обозначать не могут;
- ноль не может быть крайней левой цифрой в числе.

4.0.1. Примеры

110. На схеме внизу показано умножение двух трехзначных чисел, в результате чего получается шестизначное произведение. Некоторые из цифр заменены квадратами. Каково значение этого шестизначного произведения?

$$\begin{array}{r} \square 1 \square \\ \times 3 \square 2 \\ \hline \square 3 \square \\ 3 \square \square \square \\ \square \square \square 5 \\ \hline \square \square \square \square 3 \square \end{array}$$

Решение: Пометьте буквами некоторые квадратики, как показано на рисунке справа.

Поскольку В, умноженное на 3, заканчивается на 5, это означает, что В равно 5. Кроме того, поскольку переноса из разряда единиц нет, D должно быть 0. Это также означает, что С четное.

				A	1	B
×				3	C	2
				□	3	□
				3	□	□ D
				□	□	□ 5
				□	□	□ □ 3 □

Если А больше 4, то $\overline{A1B}$ умноженное на 2 будет давать четырехзначное число.

Если А меньше 4, то $\overline{A1B}$ умноженное на 3 будет давать трёхзначное число.

Следовательно, А равно 4.

Если С меньше 8, то С раз по $\overline{A1B}$ будет меньше 3000.

Следовательно, С не меньше 8. Поскольку оно четное, С должно быть 8. Теперь числа в остальных полях можно легко определить.

Выражение умножения: $415 \times 382 = 158530$.

Ответ: 158530.

111. Сумма цифр двузначного числа $\overline{ab}$ равна 6. Поменяв местами его цифры, получим другое двузначное число $\overline{ba}$.

Если $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$, то найдите исходное двузначное число.

Решение: По условию задачи получаем два уравнения: $(10a + b) - (10b + a) = 18$ и $a + b = 6$. В результате решения системы линейных уравнений получаем $a = 4$ и $b = 2$. Значит исходное двузначное число равно 42.

Ответ: 42.

112. Пусть I, M, S и O представляют собой разные цифры, а сумма IMSO, ISMO, OMSI, OSMI, MISO, MOSI, SIMO и SOMI равна 60012. Каково значение числа $I + M + S + O$?

Решение:

$$\begin{aligned}
 60012 &= \text{IMSO} + \text{ISMO} + \text{OMSI} + \text{OSMI} + \\
 &\quad + \text{MISO} + \text{MOSI} + \text{SIMO} + \text{SOMI} = \\
 &= 2000(I + M + O + S) + 200(I + M + O + S) + \\
 &\quad + 40(M + S) + 4(I + O) = \\
 &= 2200(I + M + O + S) + 40(M + S) + 4(I + O) = \\
 &= 2204(I + M + O + S) + 36(M + S)
 \end{aligned}$$

Обратите внимание, что $60012 = 2204 \times 27 + 504$. Так как $504 \div 36 = 14$, то есть $M + S = 14$, что удовлетворяет нашему условию. Итак, значение $I + M + S + O$ равно 27.

Ответ: 27.

4.0.2. Задачи

113. В четырехзначном числе цифра тысяч больше цифры единиц, которая не равна нулю, а цифра сотен больше цифры десятков. Новое четырехзначное число получается из исходного числа путем изменения порядка цифр. Сколько существует возможных отличий исходного и нового числа?

114. Если $\overline{243a688} \div \overline{31b2} = 764$, найдите значение $a \times b$.

115. Три положительных двузначных числа и 63 расположены в таблице, где вычисляется произведение двух чисел в каждой строке или столбце. Если сложить все четыре

произведения, получится 2016 год. Каково максимально возможное значение А?

А	
	63

116. Всякий раз, когда Сэм читает такую дату, как 20/11/2016, он неправильно интерпретирует ее как два деления, причем второе оценивается первым перед первым. Например, $20 \div (11 \div 2016) = \frac{40320}{11} = 3665\frac{5}{11}$.

Для некоторых дат, как в примере выше, он не получает целочисленный результат, а для некоторых, например, 20/08/2016, он получает $20 \div (8 \div 2016) = 5040$, что является целым числом. Сколько дат в 2016 году (день/месяц/год) дадут ему нецелый ответ?

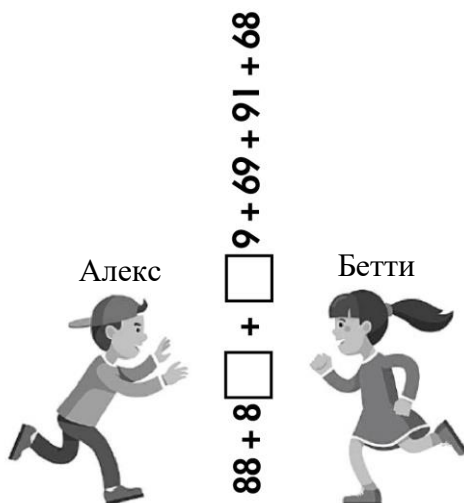
117. На диаграмме, показанной ниже, каждая пустая белая клетка заполнена целым числом от 1 до 9. Каждое число используется не более одного раза. Серая ячейка заполняется знаком ×, ÷, + или −. В каждой строке с 3 числами расчеты ведутся слева направо. В последнем столбце расчет идет сверху вниз. Покажите одно из возможных решений.

	−		=	
				×
	÷		=	
				=
			=	

118. Известно, что $\overline{AMMM}$ и $\overline{MMMB}$ - два 4 - значных числа, где А, В и М - разные цифры. Если $\frac{\overline{AMMM}}{\overline{MMMB}} = \frac{2}{5}$, то найдите значение $A + B + M$.

119. Найдите все возможные трехзначные числа $\overline{abc}$, чтобы $\overline{abc} = a! + b! + c!$ (Примечание: $n!$ (читается как n факториал) означает $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Например, $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$)

120. Алекс и Бетти стоят лицом друг к другу. Между ними находится последовательность цифр и знак «+», как показано на схеме ниже. С каждой стороны, Алекс и Бетти видят два разных выражения. Каждая цифра может быть заполнена в двух квадратах так, чтобы их соответствующие выражения имели одинаковое значение. Чему равно значение?



121. Каждая из 10 букв A, B, C, D, E, F, G, H, I и J в приведенном ниже примере представляет собой отдельную цифру.

$$\begin{array}{r}
 A \quad B \\
 C \quad D \\
 E \quad F \\
 + \quad \quad G \\
 \hline
 H \quad I \quad J
 \end{array}$$

Каково максимально возможное значение трехзначного числа $\overline{HIJ}$?

122. Каждая буква в разности $\overline{HANOI} - \overline{IMSO}$ представляет одну цифру, где разные буквы обозначают разные цифры, а буквы H и I положительные числа. Сколько существует возможных значений $\overline{IMSO}$, когда результатом разности будет трехзначное число?

123. В 2019 году возраст Питера на четыре больше, чем сумма цифр года его рождения. Каков вероятный возраст Питера (в 2019 году)?

124. Двухзначное число $\overline{ab}$ и число $\overline{ab + 45}$ называются подобными, если сумма цифр $\overline{ab}$ равна сумме цифр $\overline{ab + 45}$. Например: 15 и $15 + 45 = 60$ подобны, потому что сумма цифр каждого числа равна 6. Сколько пар подобных чисел существует?

125. Сколько существует трехзначных чисел $\overline{xyz}$ таких, что x, y и z являются положительными цифрами и $\overline{xy} > \overline{yz} > \overline{zx}$?

5. Комбинаторика

Комбинаторикой называют область математики, изучающую вопрос, сколько разных комбинаций (наборов) можно составить из заданных объектов. При этом нужные комбинации подчиняются определенным требованиям, что приводит к различным методам решения задач по комбинаторике.

Для начала разберём сущности важные для понимания комбинаторики.

Множество — набор, совокупность каких-либо объектов. Например, множество «Пароль от домена» может содержать следующие элементы, как числа, буквы или специальные символы.

Выбор — это действие, при котором мы из множества достаём какие-то составляющие. Например, в случае с паролем можно выбрать символы i, C, 5, K, x, k, 0, w.

Расположение — это действие, при котором мы расставляем выбранные элементы в определённом порядке. Например, Sxi0kK5w или kxw0C5iK.

Факториал — это математическая функция, с помощью которой мы перемножаем все числа от 1 до какого-то числа n. Факториал обозначается восклицательным знаком — !. Например, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Как правило, основной вопрос задачи заключается в подсчете числа возможных выборок с определенными свойствами. Многие задачи решаются с помощью двух основных правил — **правила суммы** и **правила произведения**.

Правила суммы и произведения.

Правило суммы. Если объект A можно выбрать n способами, а объект B – m способами, то A или B можно выбрать $n + m$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать n способами, а объект B – m способами, то выбор пары A и B в указанном порядке можно сделать $n \times m$ способами.

Разберем следующие задачи.

В классе учатся 15 девочек и 20 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать дежурного в классе?

Решение: дежурным может быть, как девочка, так и мальчик. Значит выбираем из суммы девочек и мальчиков: $15 + 20 = 35$.

У Айлин есть два цветных шарфика и три различных шапочки. Сколько возможных комплектов из одной шапочки и одного шарфика она может одеть?

Решение: Вариантов комплектов будет $2 \times 3 = 6$, так как на каждый вид шарфика у нее будет на выбор три шапочки, а шарфиков у нас два.

Размещения, перестановки, сочетания

Пусть у нас дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, состоящее из n элементов. **Выборкой объема r** называют множество $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$ содержащее r элементов исходного множества A . В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Выборка называется **упорядоченной**, если порядок следования элементов в ней важен. Важно подметить, что упорядоченные выборки считаются разными даже если они отличаются только порядком. Число их обозначают $\bar{A}_n^r$, и оно равно n^r . (Это легко следует из правила произведения:

на первом месте могут быть n элементов, на втором - также n элементов, ..., на r -м - n элементов).

Выборка называется **неупорядоченной**, если порядок следования элементов в ней не является существенным. Их число обозначают A_n^r и

$$A_n^r = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - r + 1) = n! / (n - r)!$$

Перестановка – размещение без повторения при $r = n$. Такие выборки отличаются только порядком элементов. Их число обозначают P^n и $P^n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$

Также, $0!$ принято считать равным 1.

Сочетание – выборка, у которой все элементы разные, а порядок несущественен.

Их число можно рассчитать следующей формулой:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n(n - 1) \dots (n - r + 1)}{r!} = \frac{n!}{(n - r)! r!}$$

Данная формула следует из того, что для каждого сочетания можно сделать $r!$ перестановок, а число этих сочетаний C_n^r и по правилу произведения

$$r! \cdot C_n^r = A_n^r$$

У Тимура есть 12 рубашек. Сколькими способами из них можно выбрать 3 рубашки для поездки на олимпиаду IMSO?

Решение: так как порядок не существен, то число сочетаний равно

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{9! 3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

5.0.1. Примеры

126. IMSO, MOSI и SMIO — это некоторые варианты расположения букв I, M, S и O. Сколько существует различных вариантов расположения букв, при которых буква I не находится рядом с буквой O?

Решение: Если мы поместим M на первую позицию, то вторая позиция не может быть S, иначе I и O окажутся рядом. Кроме того, четвертая позиция не может быть S, поэтому S должна находиться в третьей позиции. Таким образом, I и O могут быть помещены во вторую или четвертую позицию, следовательно, есть два пути.

Аналогично, если мы поместим S на первую позицию, то останется еще 2 пути.

Теперь, если мы поместим I на первую позицию, то вторая позиция не может быть O, иначе I и O будут следующими друг за другом, поэтому мы можем выбрать M или S. Затем для третьей позиции мы можем выбрать одну букву из оставшихся двух букв и оставшаяся одна буква будет помещена на четвертую позицию. Значит, есть $2 \times 2 = 4$ способа. Аналогично, если мы поместим O на первую позицию, появится еще 4 способа.

Следовательно, необходимое количество композиций равно $2 + 2 + 4 + 4 = 12$.

Ответ: 12.

127. В выражении $5 ___ 4 ___ 6 ___ 3$ поместите каждый из трех операционных символов $+$, $-$ и $\times$ ровно один раз в три пробела и запишите все его возможные значения. Каково максимально возможное значение полученного выражения?

Решение: Существует шесть различных способов заполнить выражение $5 _ 4 _ 6 _ 3$, используя три операционных символа. Так как символа три, то на первой позиции может быть 3 операции, на второй две, а на последней одна, значит $3 \times 2 \times 1 = 6$. Рассмотрим эти шесть вариантов:

$$5 \times 4 + 6 - 3 = 23, \quad 5 \times 4 - 6 + 3 = 17,$$

$$5 + 4 \times 6 - 3 = 26, \quad 5 + 4 - 6 \times 3 = -9,$$

$$5 - 4 \times 6 + 3 = -16, \quad 5 - 4 + 6 \times 3 = 19.$$

Максимальное значение равно 26.

Ответ: 26.

128. Сколько существует трехзначных натуральных чисел $\overline{abc}$, таких что $a \leq b \leq c$?

Решение: Если $a = b = c$, то имеется 9 чисел. Если $a = b$ или $b = c$, то есть $2 \times \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 72$ числа. Если $a < b < c$, то есть $C_3^9 = \frac{9!}{(9-3)! \times 3!} = 84$ числа.

Следовательно, в общей сложности имеются $9 + 72 + 84 = 165$ числа, удовлетворяющие заданным условиям.

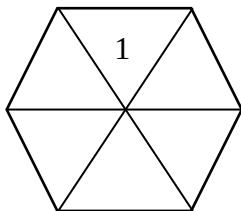
Ответ: 165.

5.0.2. Задачи

129. Сколько трехзначных положительных целых чисел обладают свойством, согласно которому произведение всех их цифр равно 18?

130. В шестиугольнике ниже цифра 1 находится в верхнем треугольнике, как показано на рисунке. Сколькими

способами можно разместить числа 2, 3, 4, 5 и 6 в оставшихся пустых треугольниках так, чтобы сумма чисел в противоположных треугольниках была ровно 5, 7 и 9?



131. В шахматном турнире участвуют 15 игроков, каждые два игрока играют друг против друга один раз. Победа стоит 2 очка, ничья - 1 очко, а поражение - 0 очков. Приз получает любой игрок, набравший не менее 20 очков. Каково максимальное число обладателей приза?

132. В партии 18 человек. Каждый из них пожимает руку хотя бы одному человеку, и никакие два человека не пожимают друг другу руки более одного раза. Если X пожимает руку Y , то X не пожимает руку никому, кто пожимал руку Y . Если X не пожимает руку Y , то X пожимает руку всем, кто пожимал руку Y . Каково максимальное и минимальное количество рукопожатий, которые могут состояться?

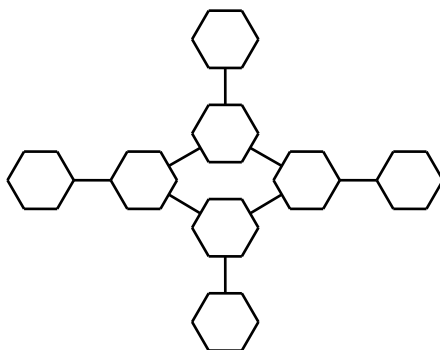
133. Председатель комиссии в составе пяти членов постоянно сидит на одном и том же стуле за круглым столом. Сколькими способами можно рассадить остальных четырех участников за один стол, если стульев ровно 8?

134. Рассмотрим все трехзначные числа, в которых все цифры различны и не используется цифра «0». Найдите сумму всех таких трехзначных чисел.

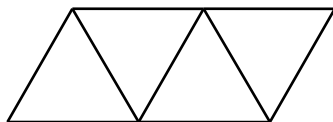
135. Сколько существует различных четырехзначных чисел, у которых сумма цифр равна 9 и цифра 0 не используется?

136. Сколькими способами можно выбрать три разных числа из чисел от 1 до 15 так, чтобы их сумма была кратна 4?

137. Каждый шестиугольник окрашен в красный, желтый или синий цвет так, что ни один из двух шестиугольников, соединенных отрезком прямой, не имеет одинакового цвета. Сколькими способами можно раскрасить диаграмму?



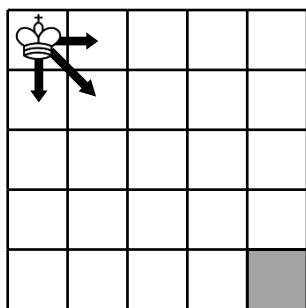
138. На схеме, изображенной ниже, раскрасьте каждый из равносторонних треугольников любым из 4 цветов: синим, желтым, зеленым или красным так, чтобы ни один из двух треугольников не был одинакового цвета. Сколько существует различных способов раскрасить диаграмму? (Два способа раскраски диаграммы считаются одинаковыми, если мы можем получить одну раскраску из другой, повернув всю диаграмму, при этом отражение диаграммы будет считаться другой раскраской).



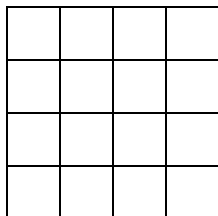
139. Пусть n - целое положительное число, такое, что все его цифры различны и его сумма цифр равна 17. Если

$n < 2018$, то сколько существует различных возможных значений n ?

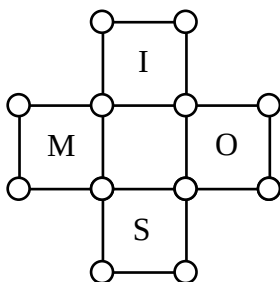
140. На каждом шаге шахматная фигура на доске, показанная на схеме, может перемещаться на 1 клетку в одном из трех направлений: вправо, вниз или вниз по диагонали вправо. Сколькими способами он может переместиться из верхнего левого угла в нижний правый ровно за 6 шагов?



141. Используя цифры 1, 3, 5, 7 и 9 для образования трехзначных чисел (каждая цифра может быть использована более одного раза), сколько из них будет кратно 3?
142. Используя 16 черных пешек и 16 белых пешек, сколькими способами можно расставить 16 пешек на шахматной доске 4×4 , где каждая пешка занимает 1 клетку, так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце количество белых пешек было четным?



143. Есть четыре квадрата, обозначенных буквами I, M, S и O, как показано на схеме. Каждая вершина этих квадратов окрашена в один из трех цветов: синий, красный, желтый. Раскраска называется «четной», если в каждом из четырех квадратов 4 вершины окрашены ровно в два цвета, так что 2 вершины одного цвета, а остальные 2 вершины другого цвета. Сколько существует разных четных вариантов раскраски?



6. Среднее арифметическое значение

Среднее арифметическое — это сумма всех чисел в ряду, разделённая на количество слагаемых.

Например, перед вами ряд чисел «1, 2, 3, 4, 5». Как следует из определения, чтобы узнать среднее арифметическое, нужно сложить все данные вам числа, а потом разделить получившийся результат на количество этих чисел. В приведённом примере на пять,

$$a_{\text{ср.арифм.}} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Вот так это выражается общей формулой:

$$a_{\text{ср.арифм.}} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

6.0.1. Примеры

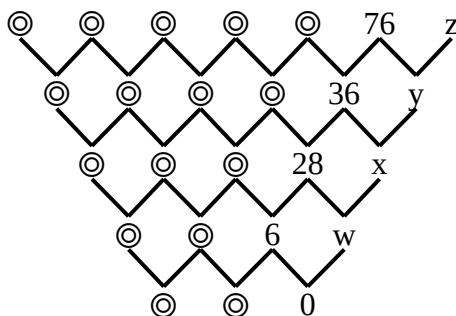
144. В течение года учитель дал десять тестов, каждый из которых имел одинаковое значение. Если бы Мэри набрала на 10 баллов больше на последнем тесте, ее средний балл стал бы 92. Каким был ее фактический средний балл?

Решение: Если бы Мэри получила на 10 баллов больше, это означало бы еще 1 балл за тест. Следовательно, ее

фактическое среднее значение на 1 меньше 92. Другими словами, оно равно 91.

Ответ: 91.

145. В расположенной ниже схеме каждое число представляет собой неотрицательную разность двух чисел над ним. Каково среднее из восьми возможных значений z ?



Решение: Значение w должно быть 6. Среднее из двух возможных значений x должно быть 28. Аналогично среднее из четырех возможных значений y должно быть 36, следовательно, среднее из восьми возможных значений z должно быть 76.

Ответ: 76.

6.0.2. Задачи

146. В классе А учатся 10 человек, а в классе В - 15 человек. В тесте средний балл для класса А - 60, а средний балл для класса В - 66. Новый ученик отвечает на тот же тест в офисе. Если его зачислить в класс А, то средний балл нового класса станет 62. Если его зачислят в класс В, каким будет его новый средний балл?

147. Тридцать девочек участвовали в математическом конкурсе. Первая девочка набрала 70, а вторая - 80. Затем учитель объявил, что оценка каждой девочки после первых двух равна среднему из оценок всех девочек до нее. Какой будет оценка последней девочки?
148. В последовательности первые два члена равны 64 и 36. Каждый последующий член является средним значением предыдущих. Найдите сумму первых 2018 членов последовательности.
149. Существуют различные целые положительные числа, среднее число которых равно 38. Известно, что 52 - одно из таких чисел. Если удалить 52, то среднее значение оставшихся целых чисел станет 37. Найдите максимально возможное положительное целое число среди этих целых чисел.
150. У Али 5 последовательных номеров, а у Бена 7 последовательных номеров. Если второе число Али равно 5, а сумма чисел Али и Бена равна 128, каково наибольшее из чисел Бена?

7. Задачи с дробями

7.0.1. Примеры

151. Изучите следующий шаблон:

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}, \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2013 \times 2014} = \frac{a+2}{a+3}$$

где a - целое положительное число, найдите значение a .

Решение: Обратите внимание, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2013 \times 2014} = \\ & = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}\right) = \\ & = \frac{1}{1} - \frac{1}{2014} = \frac{2013}{2014} \end{aligned}$$

Итак, $\frac{a+2}{a+3} = \frac{2013}{2014}$ и у нас есть $a = 2011$.

Ответ: 2011.

152. Упростите выражение:

$$2 \times 1\frac{1}{2} + 3 \times 1\frac{1}{3} + 4 \times 1\frac{1}{4} + 5 \times 1\frac{1}{5} + 6 \times 1\frac{1}{6} + \\ + 7 \times 1\frac{1}{7} + 8 \times 1\frac{1}{8} + 9 \times 1\frac{1}{9}.$$

Решение:

$$2 \times 1\frac{1}{2} + 3 \times 1\frac{1}{3} + 4 \times 1\frac{1}{4} + 5 \times 1\frac{1}{5} + 6 \times 1\frac{1}{6} + \\ + 2 \times 7\frac{1}{7} + 8 \times 1\frac{1}{8} + 9 \times 1\frac{1}{9} = \\ = 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times \frac{4}{3} + 4 \times \frac{5}{4} + 5 \times \frac{6}{5} + 6 \times \frac{7}{6} + \\ + 7 \times \frac{8}{7} + 8 \times \frac{9}{8} + 9 \times \frac{10}{9} = \\ = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 52$$

Ответ: 52.

153. Доход таксиста складывается из его регулярной зарплаты и некоторых чаевых. Если чаевые составляют $\frac{5}{4}$ от его обычной зарплаты, какова доля чаевых в его общем доходе?

Решение: Предположим, его обычная зарплата равна 4 единицам, тогда чаевые составляют 5 единиц. Следовательно, его общий доход равен 9 единицам, следовательно, искомая доля равна $\frac{5}{9}$.

Ответ: $\frac{5}{9}$.

7.0.2. Задачи

154. На выборах планировали голосовать только 80% людей. Однако фактически проголосовали только 85% тех, кто хотел голосовать. Каков процент людей, которые действительно проголосовали?
155. Алиса отдает $\frac{1}{4}$ от всех своих яблок Брайану, а затем отдает $\frac{1}{3}$ от оставшихся яблок Колину. Если оставшиеся у Алисы яблоки стоят 13500 рупий, какова общая стоимость яблок, которые Колин получил от Алисы?
156. У мальчика есть чашка чая, а у девочки — пустой стакан такого же объема, как и чашка. На первом этапе мальчик наливает $\frac{1}{2}$ чая из чашки в стакан. На втором этапе девушка наливает $\frac{1}{3}$ чая из стакана в чашку. На третьем этапе мальчик наливает $\frac{1}{4}$ чая из чашки в стакан. На четвертом этапе девушка наливает $\frac{1}{5}$ чая из стакана в чашку. Это попеременное переливание продолжается так, что на каждом этапе знаменатель увеличивается на 1. Какая часть чая окажется в чашке после тринадцатого шага?
157. Есть три дроби, все из которых имеют наименьшее значение. Числители и знаменатели представляют собой положительные целые числа. Отношение их числителей находятся в соотношении $3 : 2 : 4$, а отношение их знаменателей в соотношении $5 : 9 : 15$. Если сумма эти трех дробей равна $\frac{28}{45}$, чему равна сумма их знаменателей?

158. В классах А и В одинаковое количество учеников.

- Число учащихся класса А, принявших участие в олимпиаде по математике, составляет одну треть от числа учащихся класса В, не принимавших участия.

- Число учащихся класса В, принявших участие в олимпиаде по математике, составляет одну пятую от числа учащихся класса А, не принимавших участия.

Найдите отношение числа учащихся, не принимавших участия в олимпиаде в классе А, к числу учащихся, не принимавших участия и в классе В.

159. Какое число можно прибавить к 170 и 30 так, чтобы суммы оказались в соотношении 3 : 1?

160. Сэм, Том и Уна — повара в ресторане. Сегодня они приготовили в общей сложности 320 тарелок спагетти, из которых Сэм готовил 6 часов, Том — 8 часов, а Уна — 5 часов. Они также готовили спагетти на разной скорости: Сэм готовил 5 тарелок на каждые три, приготовленные Томом, и на каждые две, приготовленные Уной. Сколько тарелок спагетти приготовил сегодня Сэм?

161. Работа в образовательном парке Хай Лианг может быть выполнена Алексом за 6 часов, а Бобом за 10 часов. Алекс работает в течение часа, затем Боб продолжает работу в течение часа. Если они повторяют эту схему, за сколько часов будет выполнена работа? Выразите ваш ответ в виде обыкновенной дроби.

162. В приведенном ниже выражении каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 должно быть помещено в отдельный квадрат ровно один раз.

$$\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square}} + \square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square}} + \square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square}}$$

Каково максимальное значение этого выражения?

163. Пусть a и b - целые положительные числа, такие, что $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{9}{11}$. Найдите значение $a + b$, когда b принимает наименьшее возможное значение.

164. Единичные дроби – это дроби, у которых числитель равен 1, а знаменатель – любое целое положительное число. Выразите число 1 как сумму семи различных единичных дробей, учитывая, что пять из них — это $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{15}$ и $\frac{1}{30}$.
Найдите произведение двух оставшихся дробей.

165. Двадцать четыре положительных числа расположены в круге, где каждое число равно произведению двух своих соседей. Если два соседних числа — 3 и 4, какова сумма всех двадцати четырех чисел?

166. Пусть a, b и c — различные натуральные числа такие, что

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Каково наименьшее возможное значение $a + b + c$?

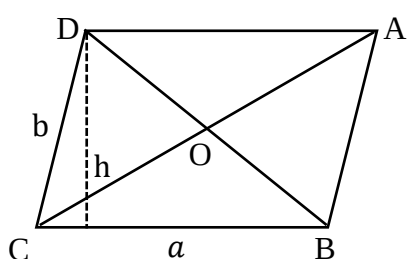
167. Найдите наибольшее целое число меньше или равное следующему выражению

$$\frac{1}{\frac{1}{1985} + \frac{1}{1985} + \frac{1}{1987} + \cdots + \frac{1}{2015}}?$$

8. Начало геометрии

8.1. Задачи на нахождение периметров, площадей фигур

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого стороны попарно параллельны и равны



$BC = AD$, $CD = AB$ и

$BC \parallel AD$, $CD \parallel AB$

Площадь равна: $S = a \times h$,
где h – высота
параллелограмма,

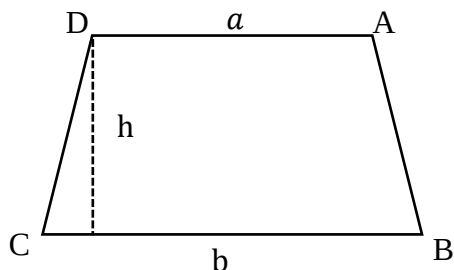
периметр $P = 2(a + b)$.

Суммы противоположных углов параллелограмма равны 180° ($\angle C + \angle A = \angle D + \angle B = 180^\circ$).

Суммы углов, прилежащих одной стороне тоже равны 180° ($\angle C + \angle B = \angle D + \angle A = 180^\circ$).

Диагонали параллелограмма AC и DB пересекаясь в точке O, делятся пополам, т.е. $CO = OA$, $DO = OB$.

Трапеция - это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две нет.

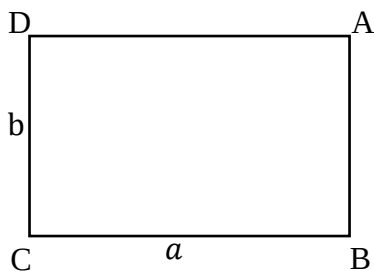


Параллельные стороны называются основаниями $BC \parallel AD$, а остальные две CD, AB – боковыми сторонами. Если боковые стороны равны $CD = AB$, то трапеция называется равнобедренной и тогда углы при основаниях равны $\angle C = \angle B, \angle D = \angle A$, диагонали тоже равны $AC = DB$.

Площадь равна:

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \times h$$

Прямоугольник - это параллелограмм, у которого углы все прямые, т.е. равны 90° .

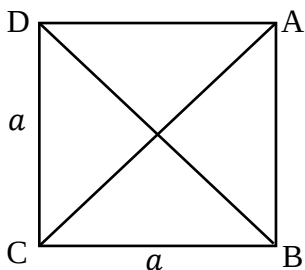


Площадь равна: $S = a \times b$,
периметр $P = 2 \times (a + b)$.

Сумма углов
прямоугольника равна
 360° .

Квадрат - это равносторонний прямоугольник.

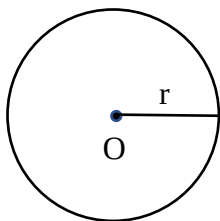
Площадь равна: $S = a \times a$, периметр $P = 4 \times a$.



Сумма углов квадрата равна 360° .

У квадрата диагонали равны и пересекаясь, образуют прямой угол. Точка пересечения диагоналей делит их на равные длины.

Окружность - это замкнутая кривая, все точки которой равноудалены от центра т. О.

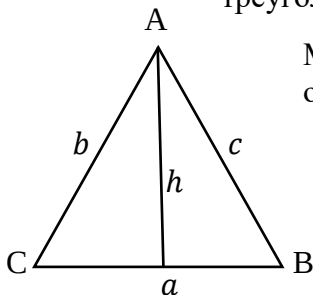


r – радиус круга, $d = 2 \times r$ – диаметр круга, $\pi = 3,14 = \frac{22}{7}$.

Площадь равна: $S = \pi \times r^2$, длина окружности

$$L = 2 \times \pi \times r$$

Треугольник – это геометрическая фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Сумма углов треугольника равна 180° .



Медианой треугольника называется отрезок соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Биссектриса делит угол треугольника пополам.

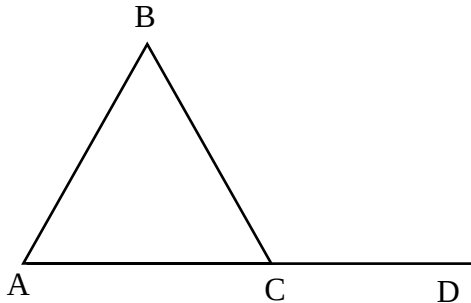
Высота - это отрезок опущенный из вершины на противоположную сторону треугольника под углом 90° .

Площадь равна: $S = \frac{1}{2}a \times h$, где h – высота, опущенная на сторону a , периметр $P = a + b + c$.

Если у треугольника 2 стороны равны, то он называется равнобедренным и тогда углы при основании третьей стороны, называемой основанием, будут равными. Например, если $b = c$, то a – основание равнобедренного треугольника и тогда $\angle C = \angle B$. В равнобедренном треугольнике высота, биссектриса и медиана, опущенные на основание, являются одним и тем же отрезком.

А если у треугольника равны три стороны, то он называется равносторонний. В этом случае у него все углы будут между собой равны и равны 60° .

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника, например $\angle BCD$. Внешний угол равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним: $\angle BCD = \angle A + \angle B$



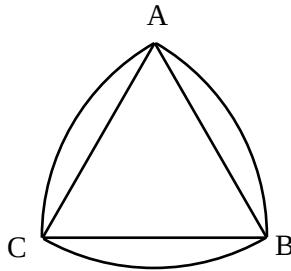
8.1.1. Примеры

168. Радиус круга увеличили на 100%. На сколько процентов увеличилась площадь круга?

Решение: Пусть радиус круга равен r , следовательно, исходная площадь равна πr^2 . После увеличения, новый радиус будет равен $2r$, следовательно, новая площадь равна $4\pi r^2$. Таким образом, разница $3\pi r^2$ и процентный прирост площади составляют 300%.

Ответ: 300%.

169. На приведенном ниже рисунке изображён равносторонний треугольник ABC со стороной равной 7 см. Проведены дуги AB, BC и CA, где точки C, A и B являются центрами соответствующих окружностей. Найдите общую длину трех дуг в см. (пусть $\pi = \frac{22}{7}$)



Решение: Поскольку треугольник равносторонний, значит каждый $\angle ABC$, $\angle BCA$ и $\angle CAB$ равен 60° и каждая дуга составляет одну шестую длины окружности радиуса 7 см. Следовательно, общая длина равна длине полукруга радиуса 7 см, т. е. $7 \times \frac{22}{7} = 22$ см.

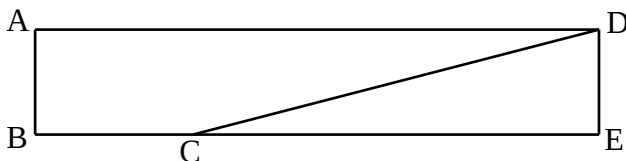
Ответ: 22 см.

170. Двенадцать одинаковых квадратов собраны в прямоугольник 6×2 . Чему равен периметр прямоугольника, если периметр каждого квадрата равен 6 см?

Решение: Длина стороны каждого квадрата равна $6 \div 4 = 1,5$ см, следовательно, периметр прямоугольника равен $2 \times (6 + 2) \times 1,5 = 24$ см.

Ответ: 24.

171. Пусть ABC — треугольник такой, что $AB = 1$ см и $BC = 1,5$ см. D — точка на прямой, проходящей через A , параллельной BC , такая, что $CD = 4$ см. Запишите все возможные целые значения длины AD в см.



Решение: Дополните параллелограмм $ABED$. Значит, $DE = AB = 1$ см.

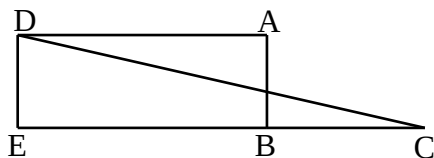
Следовательно, $3 \text{ см} = CD - DE < CE < CD + DE = 5 \text{ см}$.

Предположим, что D находится на той же стороне от AB , что и C , как показано на диаграмме выше, тогда

$$AD = BE = CE + BC.$$

Поскольку AD — целое число и $BC = 1,5$ см, то у нас должно быть $CE = 3,5$ см или $4,5$ см, чтобы $AD = 5$ см или 6 см.

Предположим, что D находится на противоположной стороне от АВ до С, как показано на диаграмме справа, тогда



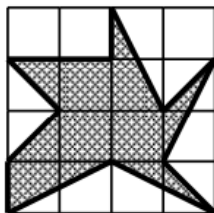
$$AD = BE = CE - BC.$$

Поскольку AD — целое число и $BC = 1,5$ см, то у нас должно быть $CE = 3,5$ см или $4,5$ см, чтобы AD было 2 см или 3 см.

Ответ: 2 см, 3 см, 5 см или 6 см

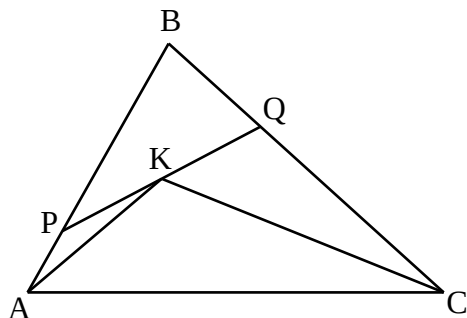
8.1.2. Задачи

172. На приведенной ниже диаграмме каждый из маленьких квадратов имеет размеры 1 см на 1 см в большой таблице 4 см на 4 см. Найдите площадь 11 - гранного многоугольника в см^2 .

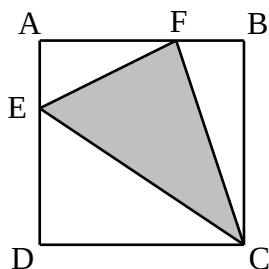


173. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно так, что $BP = 3PA$, $QC = 2BQ$ и точка K -

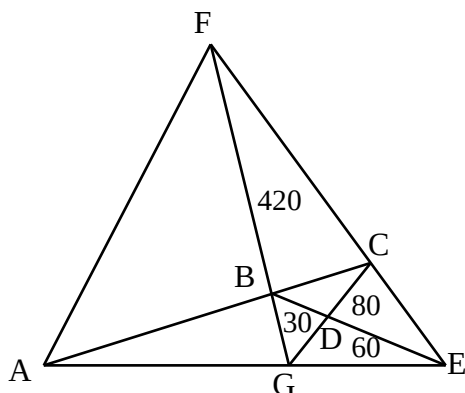
середина отрезка PQ. Если площадь треугольника ABC равна 120 см^2 , найдите площадь треугольника AKC.



174. На рисунке ниже изображен квадрат ABCD, E - точка на AD и F - точка на AB, такая, что $DE = 2AE$ и $AF = 2BF$. Каково отношение площади $\triangle CEF$ к площади квадрата ABCD?

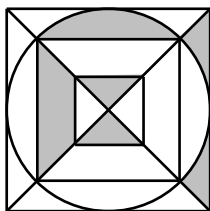


175. Треугольник разделен на семь треугольников. Четыре из них имеют площади 420 см^2 , 80 см^2 , 60 см^2 и 30 см^2 , как показано на рисунке ниже. Найдите площадь, в см^2 , треугольника AEF.



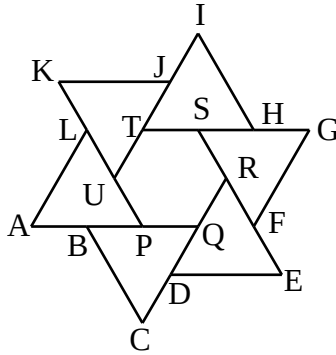
176. Девять прямых, параллельных основанию треугольника, делят каждую из двух его сторон на 10 равных отрезков, а площадь - на 10 различных частей. Найдите площадь исходного треугольника в см^2 , если площадь наибольшей из этих частей равна 76 см^2 .

177. На приведенном ниже рисунке длина стороны самого большого квадрата составляет 10 см. Если общая площадь заштрихованных областей равна 26 см^2 , то какова длина стороны самого маленького квадрата в см?



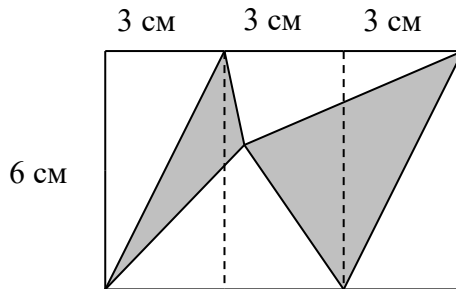
178. На приведенной ниже схеме PQRSTU является правильным шестиугольником с длиной стороны 2 см. Многоугольник ABCDEFGHIJKL получен путем построения равносторонних треугольников с длиной

стороны 4 см, из сторон шестиугольника. Найдите соотношение $\frac{S_{ABCDEFGHijkl}}{S_{PQRSTU}}$.

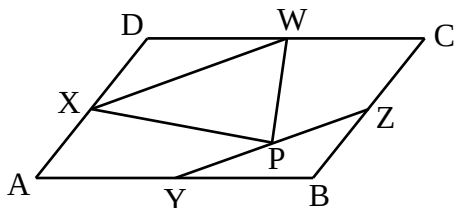


179. Разрежьте куб с помощью двух плоскостей, параллельных основанию куба, на три прямоугольных блока. Отношение площадей поверхностей этих трех блоков равно 3 : 4 : 5. Найдите отношение их объемов.

180. На приведённом ниже рисунке три прямоугольника размерами 6 см × 3 см расположены вместе в ряд. Найдите площадь заштрихованной области в см².

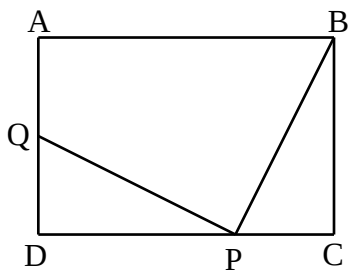


181. Точки W , X , Y и Z являются серединами четырех сторон параллелограмма $ABCD$. Если точка P - точка на отрезке YZ , то какой процент от площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь $\triangle PXW$?

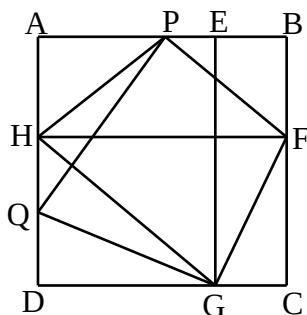


182. Основание большего треугольника в два раза больше высоты меньшего треугольника, а высота большего треугольника в три раза больше основания меньшего треугольника. Каково отношение площади большего треугольника к площади меньшего треугольника?

183. Пусть $ABCD$ — прямоугольник такой, что $AD = 8$ см и $CD = 12$ см. Если точка P находится на CD так, что $DP = AD$ и точка Q находится на AD так, что $DQ = CP$, то какова площадь четырехугольника $ABPQ$ в см^2 ?



184. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной 10 см. Точки E, F, G и H находятся на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно, так что EG параллельна AD , а FH параллельна AB . Если P — точка на AE такая, что $PE = 2$ см, а Q — точка на DH такая, что $HQ = 3$ см. Какова площадь четырехугольника $PFGQ$ в см^2 ?



185. Шесть одинаковых пирамид с квадратными основаниями собираются в куб объемом 2744 см^3 ? (см. диаграмму 2). Какова длина OH в см, которая равна высоте от вершины до квадрата основания $ABCD$ каждой пирамиды? (см. диаграмму 1)

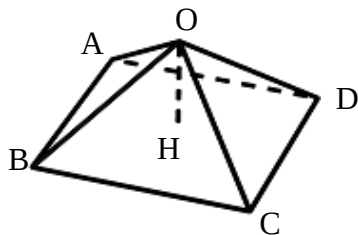


Диаграмма1

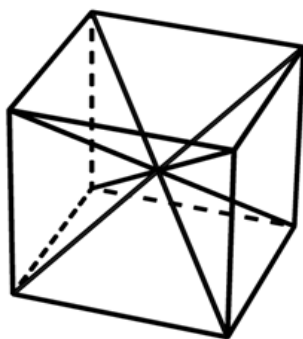
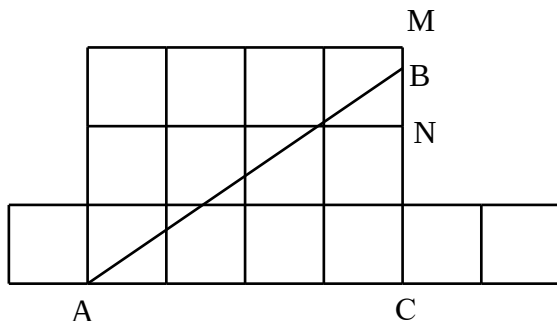
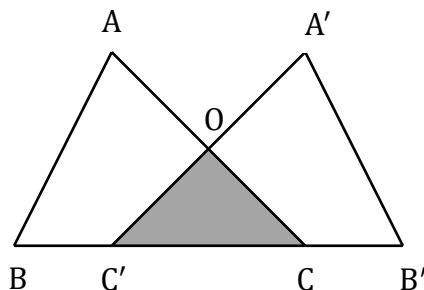


Диаграмма2

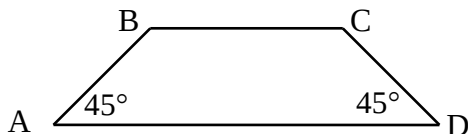
186. Диаграмма ниже состоит из 15 единичных квадратов. Если AB делит площадь данной диаграммы на две равные части. Найдите значение $\frac{MB}{BN}$.



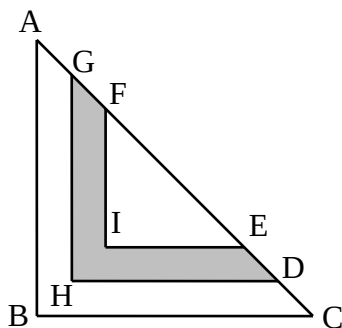
187. В треугольнике ABC $\angle ACB = 45^\circ$ и $BC = 24$ см. Длина высоты от A до BC равна 16 см. Точки B' и C' находятся на линии BC так, что $BC = B'C'$. Предположим $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$, как показано на схеме ниже. Чему равна длина BB' в см, если площадь треугольника OCC' равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC ?



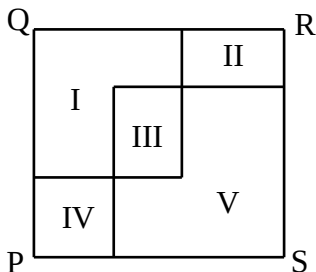
188. Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ в см^2 такой, что $AD = 16$ см, $BC = 8$ см, $AB = CD$ и $\angle A = \angle D = 45^\circ$.



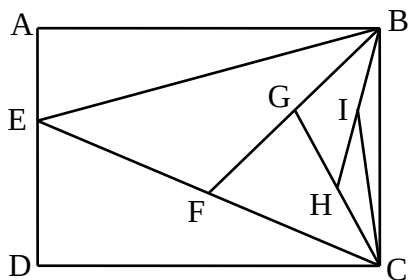
189. На схеме ниже ABC , GHD и FIE — равнобедренные прямоугольные треугольники. Если $AG = GF = CD = DE = 1$ см и $FE = 4$ см, то каково отношение площади заштрихованной области к площади треугольника ABC ?



190. Фабрика имеет форму прямоугольника PQRS с $PS = 44$ м и $RS = 40$ м. Фабрика разделена на 5 помещений: I, II, III, IV и V, как показано на схеме ниже. Периметры комнат II, III и IV равны. Также известно, что помещения I и III, а также помещения V и III образуют квадрат. Какова сумма периметра в метрах помещений I и V?

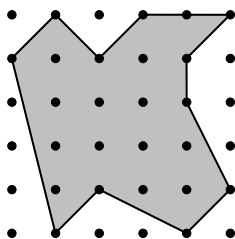


191. На рисунке ниже E - точка на стороне AD прямоугольника $ABCD$. Точки F, G, H и I - середины сторон CE, BF, CG и BH соответственно.



Если площадь треугольника BCI равна 1 см^2 , найдите площадь прямоугольника $ABCD$ в см^2 .

192. На рисунке расстояние между соседними точками в каждой строке и каждом столбце равно 1 см . Какова площадь заштрихованной области в см^2 ?

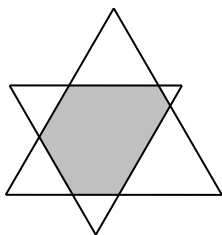


193. Прямоугольник разделен на 9 частей, как показано на рисунке ниже. Также указаны периметры в см пяти известных частей. Найдите периметр исходного прямоугольника в см.

	a	b	c
d		11	
e	20	8	11
f		12	

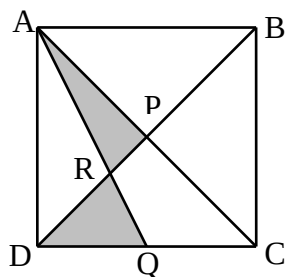
194. Цилиндрический резервуар диаметром 2,8 м и высотой 4,2 м заполнен трубой диаметром 7 см, по которой вода течет со скоростью 4 м/с. Сколько минут потребуется, чтобы полностью заполнить резервуар? (возьмем $\pi = \frac{22}{7}$)

195. Два равносторонних треугольника, наложенных друг на друга, показаны на рисунке. Стороны каждого треугольника параллельны сторонам другого. Периметры двух треугольников равны 744 см и 930 см соответственно. Каков периметр заштрихованного шестиугольника в см?

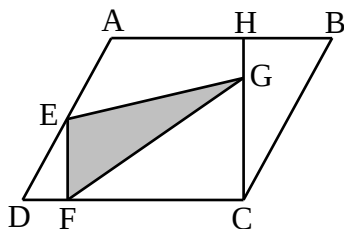


196. На рисунке ABCD - квадрат, в котором AB = 24 см. Пусть точка Q - середина стороны CD, точка P - точка пересечения диагоналей AC и BD, точка R - точка пересечения отрезков

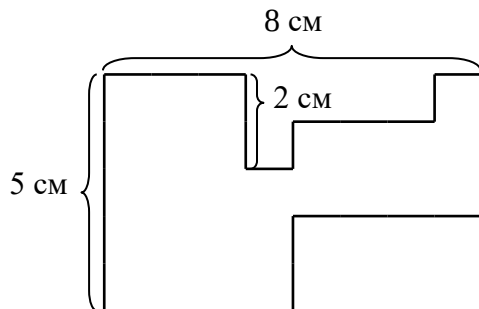
AQ и BD. Найдите сумму площадей, в см^2 , треугольника ARP и треугольника DRQ.



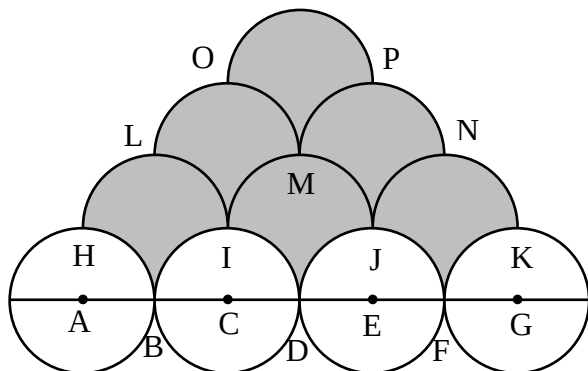
197. В параллелограмме ABCD точка E лежит на AD так, что $AE = DE$, точка F лежит на CD, а точка H лежит на AB так, что $EF \perp DC$ и $CH \perp AB$. Пусть $AH : HB = 3 : 2$ и точка G лежит на прямой CH. Если площадь треугольника EFG равна 296 см^2 , найдите площадь параллелограмма ABCD в см^2 .



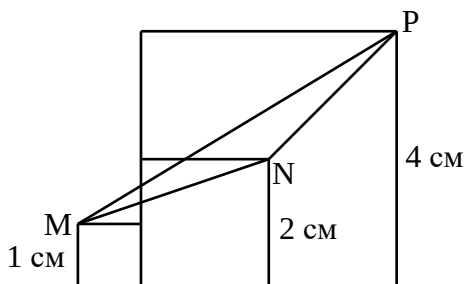
198. Каков периметр приведенного ниже чертежа, если все углы прямые?



199. Десять круглых карточек радиусом 2 см каждая располагаются, как показано на схеме. Учитывая, что четыре коллинеарные точки А, С, Е и G являются центрами белых карт, а АНІС, СІJE, EJKG и COPE — прямоугольниками, а BLMD и DMNF — квадратами, какова площадь заштрихованной области в см^2 ?

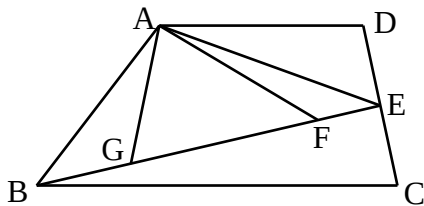


200. На схеме ниже представлены 3 квадрата, длина сторон которых составляет 1 см, 2 см и 4 см соответственно. Какова площадь треугольника MNP в см^2 ?



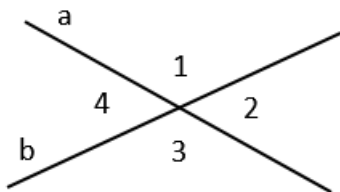
201. Пять точек A, B, C, D и E находятся на плоскости так, что $AB = 90$ см, $BC = 45$ см, $CD = 252$ см, $DE = 81$ см, $EA = 36$ см. Чему равна длина CE в см?

202. На приведенном ниже чертеже $ABCD$ — трапеция, а E — средняя точка DC . Площади треугольников ABG , ABF и AGE составляют 15 см², 45 см² и 60 см² соответственно. Какова площадь (в см²) трапеции $ABCD$?



8.2. Угол, его мера и свойства

Углом называют геометрическую фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки. Угол в 90° называется прямым. Угол, равный 180° , представляющий из себя прямую, называется развернутым. Меньше прямого, называется острым. Угол больше прямого, но меньше развернутого называется тупым.



Две прямые a и b пересекаясь, образуют 2 пары вертикальных углов, которые равны между собой: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

Каждая пара $(\angle 1, \angle 2)$; $(\angle 2, \angle 3)$; $(\angle 3, \angle 4)$; $(\angle 4, \angle 1)$;

образует два смежных угла, сумма которых будет равна 180° .

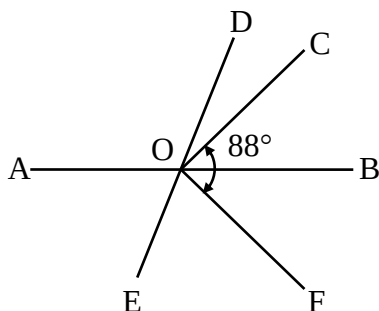
Сумма внутренних углов произвольного n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$. Например, для треугольника сумма углов будет равна $180^\circ(3 - 2) = 180^\circ$, а для четырехугольника $180^\circ(4 - 2) = 360^\circ$.

Если у многоугольника все стороны равны, то он называется правильным и каждый его угол будет рассчитываться по след формуле:

$$\alpha = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$$

8.2.1. Примеры

203. На диаграмме ниже прямые AB и DE пересекаются в точке O и $\angle COF = 88^\circ$. Учитывая, что OE и OB — биссектрисы $\angle AOF$ и $\angle COF$ соответственно, найдите величину $\angle COD$ в градусах.



Решение: Поскольку OB — биссектриса $\angle COF$, значит $\angle COB = \angle BOF = 44^\circ$ и $\angle AOF = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$.

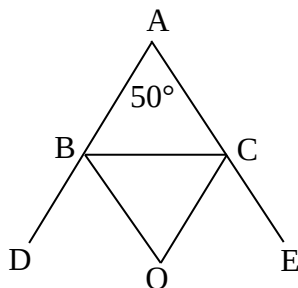
Поскольку OE — биссектриса $\angle AOF$, значит

$$\angle EOF = \frac{136^\circ}{2} = 68^\circ.$$

Следовательно, $\angle COD = 180^\circ - 88^\circ - 68^\circ = 24^\circ$.

Ответ: 24° .

204. В треугольнике ABC , $\angle A = 50^\circ$ и внешняя биссектриса $\angle B$ и $\angle C$ пересекаются в точке O . Чему равен $\angle BOC$?

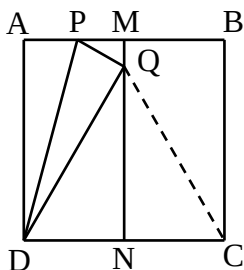


Решение:

$$\begin{aligned}
 \angle ABC + \angle ACB &= 130^\circ \\
 \angle OBC + \angle OCB + \angle BOC &= 180^\circ \\
 \frac{1}{2}(\angle DBC + \angle BCE) + \angle BOC &= 180^\circ \\
 \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC + 180^\circ - \angle ACB) + \angle BOC &= 180^\circ \\
 \frac{1}{2}(360^\circ - 130^\circ) + \angle BOC &= 180^\circ \\
 115^\circ + \angle BOC &= 180^\circ \\
 \angle BOC &= 65^\circ
 \end{aligned}$$

Ответ: 65° .

205. Пусть $ABCD$ — квадратный лист бумаги такой, что M и N — середины AB и CD соответственно. Пусть P — точка на AM такая, что если ее сложить вдоль DP , то A попадет в точку Q на отрезке MN . Какова величина $\angle ADP$ в градусах?



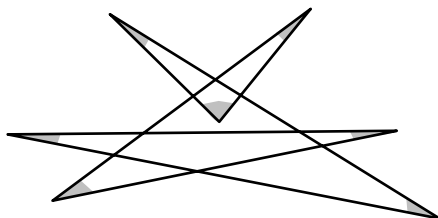
Решение: По симметрии, $QD = QD$. Поскольку AD свернута на QD , $QD = AD = CD$. Следовательно, $\triangle QCD$ — равносторонний, так что $\angle QDC = 60^\circ$. Отсюда следует, что

$$\angle ADP = \frac{1}{2} \times \angle ADQ = \frac{1}{2} \times (90^\circ - 60^\circ) = 15^\circ$$

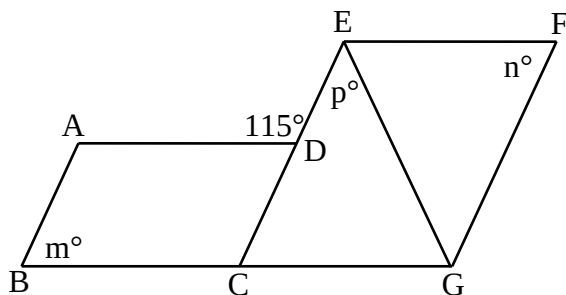
Ответ: 15° .

8.2.2. Задачи

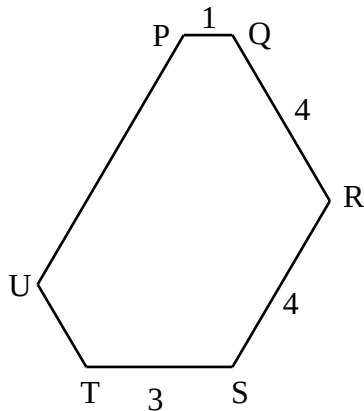
206. Найдите сумму всех заштрихованных углов в градусах на диаграмме, изображенной ниже.



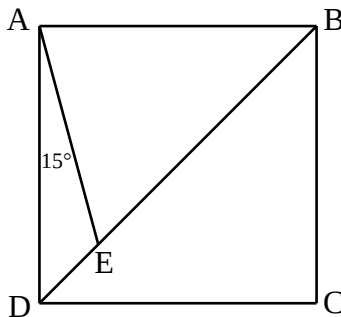
207. На рисунке ниже $ABCD$ и $CEFG$ — параллелограммы, где BCG — прямая, а $\angle ADE = 115^\circ$. Если $EG = FG$, найдите значение $m + n + p$.



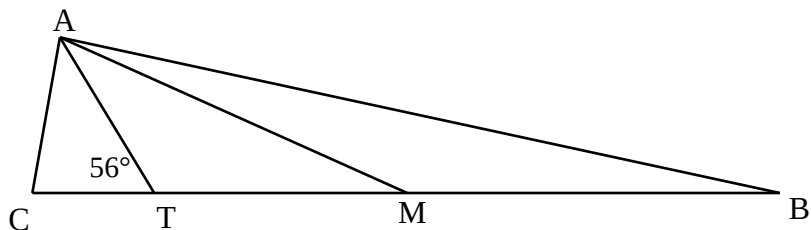
208. На приведенном ниже рисунке каждый из внутренних углов шестиугольника $PQRSTU$ равен 120° . Учитывая, что $PQ = 1$ см, $QR = RS = 4$ см и $ST = 3$ см. Найдите периметр шестиугольника $PQRSTU$ в см.



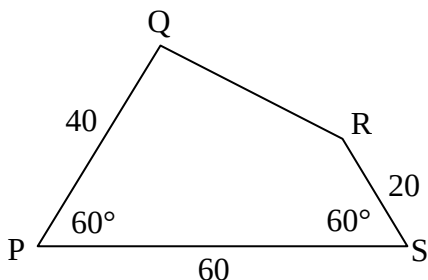
209. На приведенной ниже диаграмме $ABCD$ является квадратом, а точка E находится на BD таким образом, что $\angle EAD = 15^\circ$. Чему равно $\frac{BD-AE}{DE}$?



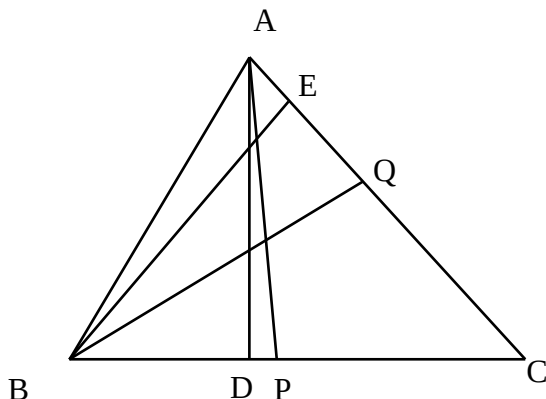
210. В треугольнике ABC точка M является серединой BC , $AM = CM$, $\angle ATC = 56^\circ$ и AT биссектриса $\angle BAC$, как показано на рисунке ниже. Какова величина $\angle AMB$ в градусах?



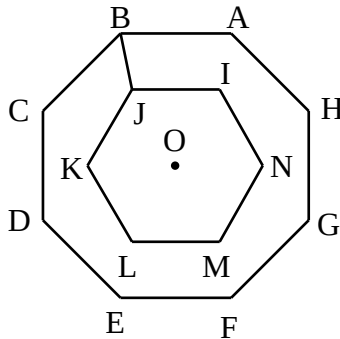
211. Четыре стержня соединены между собой гибкими шарнирами образуя четырехугольник PQRS, как показано на рисунке ниже. Если $\angle QPS = \angle RSP = 60^\circ$, $PQ = 40$ см, $RS = 20$ см и $PS = 60$ см, то какова мера в градусах для $\angle QRS$?



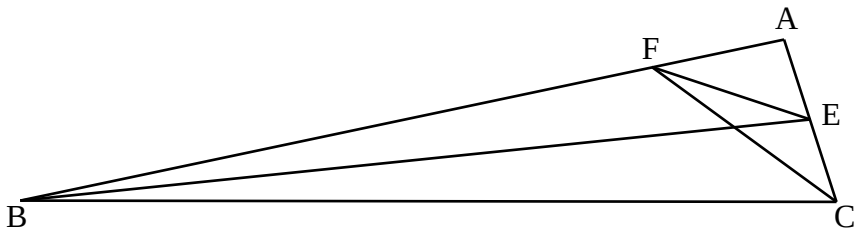
212. В треугольнике ABC известно, что AD и BE — высоты, а AP и BQ — биссектрисы в точках A и B, где P и Q лежат на CD и CE соответственно. Если $\angle PAD = 6^\circ$ и $\angle QBE = 18^\circ$, какова величина угла $\angle BCA$ в градусах?



213. На рисунке ниже правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$ и правильный шестиугольник $IJKLMN$ оба имеют центры в точке O , так что $AB \parallel IJ$. Если мера $\angle CBJ = 56^\circ$, то какова мера $\angle BJK$ в градусах?



214. В треугольнике ABC биссектрисы $\angle B$ и $\angle C$ пересекают CA в точке E и AB в точке F соответственно. Если $\angle BEF = 24^\circ$ и $\angle CFE = 18^\circ$, какова величина $\angle CAB$ в градусах?



215. Изначально робот смотрит на север. Всякий раз, когда он перестает двигаться, он автоматически поворачивается лицом на север. Он запрограммирован на выполнение следующих действий:
- (1) Поверните на 30° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.

(2) Поверните на 90° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.

(3) Поверните на 150° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.

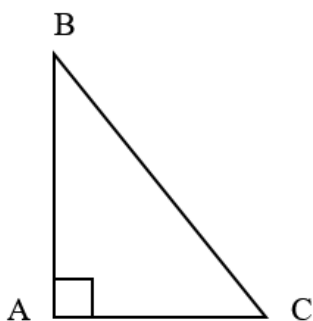
(4) Поверните на 210° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.

(5) Поверните на 270° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.

(6) Поверните на 330° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.

Каково расстояние между начальным и конечным положением робота?

8. 3. Задачи на теорему Пифагора



Треугольник, у которого угол прямой называется прямоугольным. Сторона, лежащая напротив прямого угла, называется гипотенузой, остальные две стороны называются катетами.

Сумма острых углов треугольника равна 90° .

Катет лежащий напротив угла в 30° , равен половине гипотенузы.

К примеру, если $\angle C = 30^\circ$, то $BC = 2AB$.

Если прямоугольный треугольник равнобедренный, то острые углы равны между собой и равны 45° .

Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т.е. $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

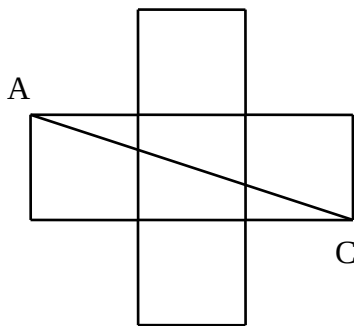
216. Гипотенуза прямоугольного треугольника имеет длину 10 см, а две другие стороны имеют длины y и $3y$ соответственно. Найди площадь треугольника в см^2 ?

Решение: По теореме Пифагора имеем $y^2 + (3y)^2 = 10^2$
или $y^2 = 10$. Площадь треугольника
 $\frac{1}{2} \times y \times 3y = \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2} \times 10 = 15 \text{ см}^2$.

Ответ: 15 см^2 .

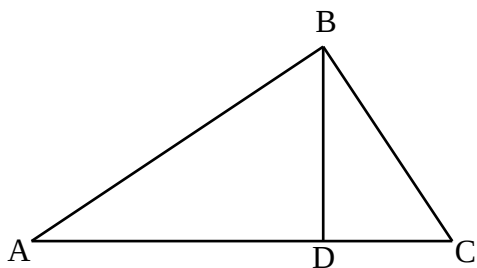
8.3.2. Задачи

217. На рисунке ниже найдите площадь в см^2 креста, образованного из пяти одинаковых квадратов, учитывая, что длина AC равна 12 см.

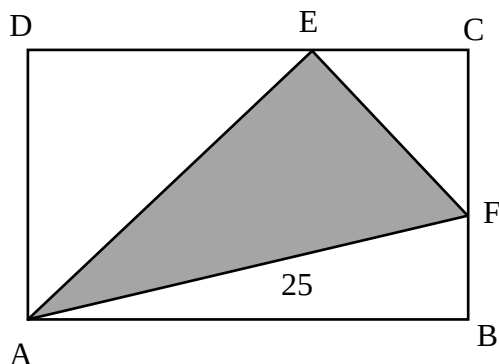


218. На диаграмме ниже угол ABC равен углу BDC и равен 90° .

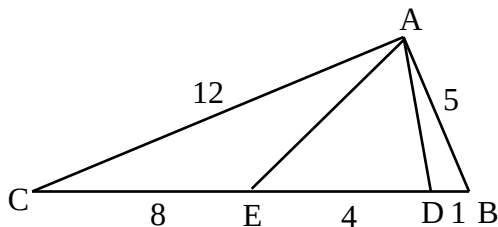
Если $\frac{AD}{DC} = \frac{9}{4}$, тогда каково значение $\frac{BD}{AC}$?



219. На рисунке ниже изображен прямоугольник ABCD, где E находится на CD, а F на BC, так что $\angle AEF = 90^\circ$ и $AF = 25$ см. Если длины DE, EC, CF, FB, AE и EF — целые положительные числа, какова площадь в см^2 прямоугольника ABCD?



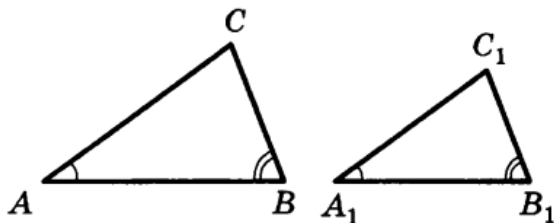
220. На рисунке $AB = 5$ см, $AC = 12$ см, $DB = 1$ см, $ED = 4$ см и $CE = 8$ см. Какова величина угла EAD в градусах?



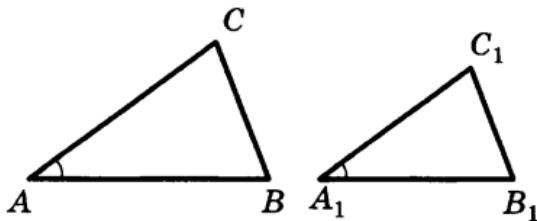
8.4. Подобие треугольников

Существуют три признака подобия треугольников:

1 признак: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

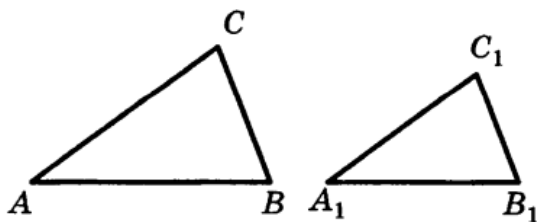


2 признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны: $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.



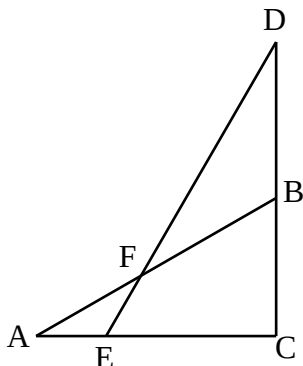
3 признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$



8.4.1. Примеры

221. На приведенном ниже рисунке ABC - треугольник с прямым углом C . Точка E лежит на AC , а точка D лежит на продолжении CB так, что треугольник DEC подобен треугольнику ABC . Если AB пересекает DE в точке F , и $AE = EF$, то какова мера угла ABC в градусах?



Решение: Так как $\triangle ABC$ и $\triangle DEC$ подобны, то $\angle ABC$ равен одному из углов $\triangle DEC$. Поскольку он меньше 90° , но больше $\angle CDE$, мы имеем $\angle ABC = \angle DEC$.

От $AE = EF$, у нас есть $\angle EAF = \angle EFA$.

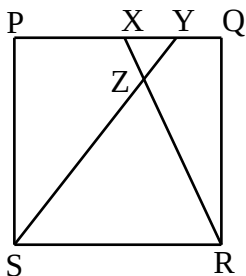
Следует, что $\angle ABC = \angle DEC = \angle EAF = \angle EFA = 2\angle BAC$.

Следовательно, $90^\circ = \angle ABC + \angle BAC = \frac{3}{2}\angle ABC$, так что $\angle ABC = 60^\circ$.

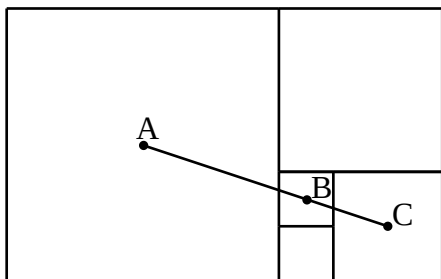
Ответ: 60° .

8.4.2. Задачи

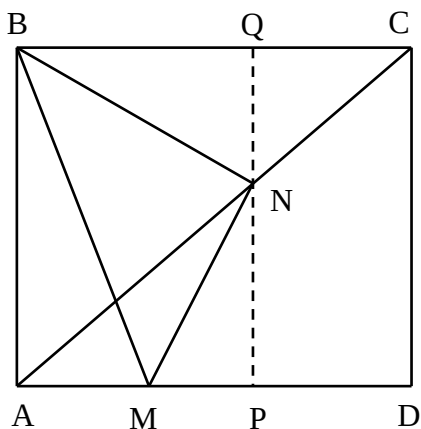
222. Квадрат PQRS имеет площадь 400 см^2 . Точки X и Y делят PQ на 3 части. Найдите площадь $\triangle XYZ$ в см^2 , если периметр $\triangle XYZ$ равен $\frac{1}{4}$ периметра $\triangle SRZ$.



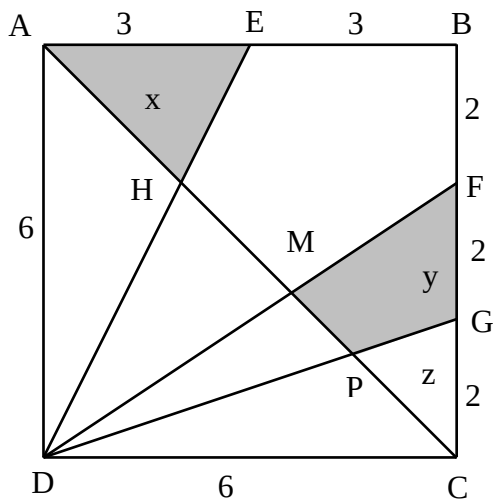
223. Приведенная ниже диаграмма состоит из пяти квадратов со сторонами длиной 1, 1, 2, 3 и 5 соответственно. Центры A, B и C трех квадратов лежат на прямой линии, как показано на рисунке. Каково отношение BC к AB?



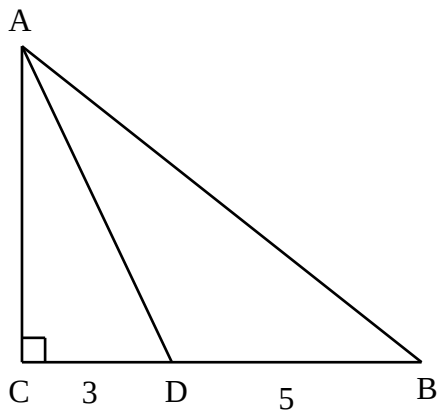
224. Дан прямоугольник ABCD такой, что $BC = 30 \text{ см}$ и $AB = 25 \text{ см}$. M — точка на AD такая, что $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$, а N — точка на диагонали AC такая, что $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{5}$, какова площадь $\triangle BMN$ в см^2 ?



225. На рисунке ниже изображен квадрат $ABCD$ со стороной 6 см. Учитывая, что E — середина AB , а точки F и G лежат на BC так, что $BF = FG = GC$. Какова общая площадь заштрихованной области в см^2 ?



226. На рисунке ниже ABC — прямоугольный треугольник, где $\angle C = 90^\circ$. Биссектриса $\angle A$ пересекает CB в точке D . Если $CD = 3$ см и $BD = 5$ см, какова длина AB в см?



9. Задачи на Исследование

227. Используйте цифры от 1 до 7, чтобы составить правильное уравнение. Каждая буква обозначает отдельное однозначное число.

$$\boxed{a} + \boxed{b} \boxed{c} \div \boxed{d} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Перечислите все возможные уравнения, если $d > 3$.

Решение: Заметим, что $d \neq 5$, иначе $c = d = 5$.

Поскольку $a \leq 7$ и $\overline{ef} \geq 12$, $\overline{bc} \div d \geq 5$.

- Если $d = 7$, то $a \leq 6$ и, следовательно $\overline{bc} \div d \geq 6$.
Значит, $\overline{bc} = 42, 56$, или 63 .

Если $\overline{bc} = 42$, то

$$\boxed{a} + \boxed{4} \boxed{2} \div \boxed{7} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит, $a + 6 = \overline{ef} \geq 13$, т.е. $a \geq 7$, что невозможно.

Если $\overline{bc} = 56$, то

$$\boxed{a} + \boxed{5} \boxed{6} \div \boxed{7} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит, $a + 8 = \overline{ef} \geq 12$, т.е. $a \geq 4$. Следовательно, $a = 4$, и мы получаем $\overline{ef} = 12$.

$$\boxed{4} + \boxed{5} \boxed{6} \div \boxed{7} = \boxed{1} \boxed{2}$$

Если $\overline{bc} = 63$, то

$$\boxed{a} + \boxed{6} \boxed{3} \div \boxed{7} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит, $a + 9 = \overline{ef} \geq 12$, т.е. $a \geq 3$. Следовательно, $a = 4$ или 5 .

- если $a = 4$, то $\overline{ef} = 13$, т.е. $c = f = 3$, что невозможно.

- если $a = 5$, то $\overline{ef} = 14$.

$$\boxed{5} + \boxed{6} \boxed{3} \div \boxed{7} = \boxed{1} \boxed{4}$$

- Если $d = 6$, то $\overline{bc} = 42, 54$ или 72

Если $\overline{bc} = 42$, то

$$\boxed{a} + \boxed{4} \boxed{2} \div \boxed{6} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит $a + 7 = \overline{ef} \geq 13$, т.е. $a \geq 6$. Следовательно, $a = 7$ и мы получаем $\overline{ef} = 14$, т.е. $b = f = 4$, что невозможно.

Если $\overline{bc} = 54$, то

$$\boxed{a} + \boxed{5} \boxed{4} \div \boxed{6} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит $a + 9 = \overline{ef} \geq 12$, т.е. $a \geq 3$. Следовательно, $a = 3$ или 7 .

- если $a = 7$, то $\overline{ef} = 16$, т.е. $d = f = 6$, что невозможно.

- если $a = 3$, то $\overline{ef} = 12$.

$$\boxed{3} + \boxed{5} \boxed{4} \div \boxed{6} = \boxed{1} \boxed{2}$$

Если $\overline{bc} = 72$, то

$$\boxed{a} + \boxed{7} \boxed{2} \div \boxed{6} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит $a + 12 = \overline{ef} \geq 13$, т.е. $a \geq 1$. Следовательно, $a = 1, 3, 4$ или 5 .

- если $a = 1$, то $\overline{ef} = 13$, т.е. $a = e = 1$, что невозможно.

- если $a = 3$, то $\overline{ef} = 15$.

$$\boxed{3} + \boxed{7} \boxed{2} \div \boxed{6} = \boxed{1} \boxed{5}$$

- если $a = 4$, то $\overline{ef} = 16$, т.е. $d = f = 6$, что невозможно.

- если $a = 5$, то $\overline{ef} = 17$, т.е. $b = f = 7$, что невозможно.

- Если $d = 4$, то $\overline{bc} = 32, 36, 52, 56, 72$ или 76

Если $\overline{bc} = 32$, то

$$\boxed{a} + \boxed{3} \boxed{2} \div \boxed{4} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит $a + 8 = \overline{ef} \geq 15$, т.е. $a \geq 7$. Следовательно, $a = 7$ и мы получаем $\overline{ef} = 15$.

$$\boxed{7} + \boxed{3} \boxed{2} \div \boxed{4} = \boxed{1} \boxed{5}$$

Если $\overline{bc} = 36$, то

$$\boxed{a} + \boxed{3} \boxed{6} \div \boxed{4} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит $a + 9 = \overline{ef} \geq 12$, т.е. $a \geq 3$. Следовательно, $a = 5$ или 7 .

- если $a = 5$, то $\overline{ef} = 14$, т.е. $d = f = 4$, что невозможно.

- если $a = 7$, то $\overline{ef} = 16$, т.е. $c = f = 6$, что невозможно.

Если $\overline{bc} = 52$, то

$$\boxed{a} + \boxed{5} \boxed{2} \div \boxed{4} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит $a + 13 = \overline{ef} \geq 16$, т.е. $a \geq 3$. Следовательно, $a = 3, 6$ или 7 .

- если $a = 7$, то $\overline{ef} = 20$, т.е. $f = 0$, что невозможно.

- если $a = 6$, то $\overline{ef} = 19$, т.е. $f = 9$, что невозможно.

- если $a = 3$, то $\overline{ef} = 16$.

$$\boxed{3} + \boxed{5} \boxed{2} \div \boxed{4} = \boxed{1} \boxed{6}$$

Если $\overline{bc} = 56$, то

$$\boxed{a} + \boxed{5} \boxed{6} \div \boxed{4} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит $a + 14 = \overline{ef} \geq 17$, т.е. $a \geq 1$. Следовательно, $a = 3$ или 7 .

- если $a = 3$, то $\overline{ef} = 17$.

$$\boxed{3} + \boxed{5} \boxed{6} \div \boxed{4} = \boxed{1} \boxed{7}$$

- если $a = 7$, то $\overline{ef} = 21$.

$$\boxed{7} + \boxed{5} \boxed{6} \div \boxed{4} = \boxed{2} \boxed{1}$$

Если $\overline{bc} = 72$, то

$$\boxed{a} + \boxed{7} \boxed{2} \div \boxed{4} = \boxed{e} \boxed{f}$$

Значит $a + 18 = \overline{ef} \geq 31$, т.е. $a \geq 13$, что невозможно.

Если $\overline{bc} = 76$, то

$$\boxed{a} + \boxed{7}\boxed{6} \div \boxed{4} = \boxed{e}\boxed{f}$$

Значит $a + 19 = \overline{ef} \geq 21$, т.е. $a \geq 2$. Следовательно $a = 2, 3$ или 5 .

- если $a = 2$, то $\overline{ef} = 21$, т.е. $a = e = 2$, что невозможно.

- если $a = 3$, то $\overline{ef} = 22$, т.е. $e = f = 2$, что невозможно.

- если $a = 5$, то $\overline{ef} = 24$, т.е. $d = f = 4$, что невозможно.

Всего есть 8 решений

$$\boxed{4} + \boxed{5}\boxed{6} \div \boxed{7} = \boxed{1}\boxed{2}$$

$$\boxed{5} + \boxed{6}\boxed{3} \div \boxed{7} = \boxed{1}\boxed{4}$$

$$\boxed{3} + \boxed{5}\boxed{4} \div \boxed{6} = \boxed{1}\boxed{2}$$

$$\boxed{3} + \boxed{7}\boxed{2} \div \boxed{6} = \boxed{1}\boxed{5}$$

$$\boxed{7} + \boxed{3}\boxed{2} \div \boxed{4} = \boxed{1}\boxed{5}$$

$$\boxed{3} + \boxed{5}\boxed{2} \div \boxed{4} = \boxed{1}\boxed{6}$$

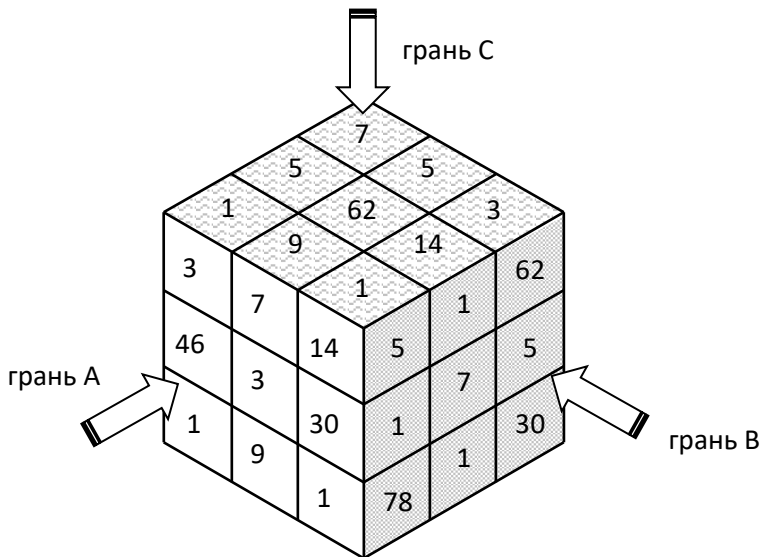
$$\boxed{3} + \boxed{5}\boxed{6} \div \boxed{4} = \boxed{1}\boxed{7}$$

$$\boxed{7} + \boxed{5}\boxed{6} \div \boxed{4} = \boxed{2}\boxed{1}$$

228. Имеется 27 кубиков, каждый размером $1 \times 1 \times 1$, которые склеиваются вместе, образуя большой куб $3 \times 3 \times 3$. Каждая грань каждого из кубиков $1 \times 1 \times 1$ содержит целое положительное число, такое, что:

- Две противоположные грани любого кубика всегда должны содержать четное и нечетное число. Более того, четное число должно быть в два раза больше нечетного.

- Когда два любых кубика помещаются лицом друг к другу, на двух соприкасающихся гранях всегда должно быть четное и нечетное число. Более того, нечетное число должно быть на 1 больше, чем четное.



(a) Расположите числа на гранях A' , B' и C' , которые противоположны граням A , B , и C , соответственно. Найдите общую сумму чисел на гранях A' , B' и C' .

(b) Найдите общую сумму чисел на гранях всех кубиков.

Решение:

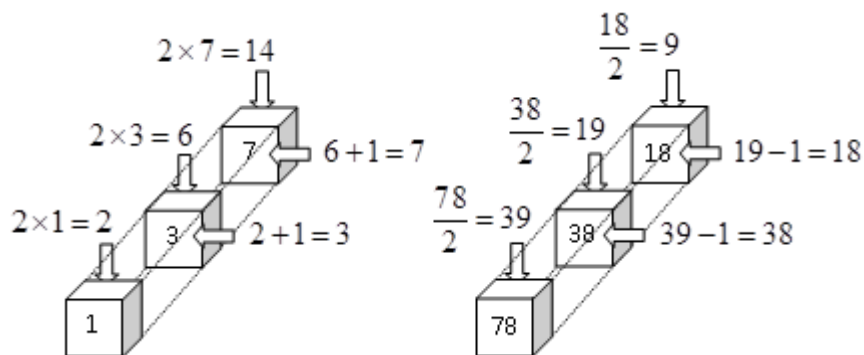
(а) Предположим, что грань куба $1 \times 1 \times 1$ содержит нечетное число n . Тогда его противоположная грань должна содержать число $2n$. Таким образом, грань, касающаяся этой противоположной грани, должна содержать число $2n + 1$, и противоположная ей грань, в свою очередь, содержит число $4n + 2$, а грань третьего куба, касающаяся этой грани, должна содержать число $4n + 3$ и противоположная ей грань третьего куба должна содержать число $8n + 6$ причем последняя грань также находится на противоположной грани куба $3 \times 3 \times 3$ по сравнению с первоначально рассматриваемой гранью.

Предположим, что одна из граней кубика $1 \times 1 \times 1$ содержит четное число m . Тогда на его противоположной грани должно находиться число $\frac{m}{2}$. Таким образом, грань, касающаяся этой противоположной грани, должна содержать число $\frac{m}{2} - 1 = \frac{m-2}{2}$, противоположная ей грань, в свою очередь, содержит число $\frac{m-2}{4}$, а грань третьего куба, касающаяся этой грани, должна содержать число $\frac{m-2}{4} - 1 = \frac{m-6}{4}$, и противоположная ей грань третьего куба должна содержать число $\frac{m-6}{8}$, причем последняя грань также находится на противоположной грани куба $3 \times 3 \times 3$ по сравнению с первоначально рассматриваемой гранью.

Пример:

На одной из граней единичного куба $3 \times 3 \times 3$ записано число 1 $\rightarrow$ На грани, противоположной этой грани куба $3 \times 3 \times 3$, записано число $8 \times 1 + 6 = 14$.

Число 78 записано на одной из граней единичного куба на кубе $3 \times 3 \times 3 \rightarrow$ Противоположная этой грани грань куба $3 \times 3 \times 3$ содержит число $\frac{78-6}{8} = 9$.



Цепочки также могут меняться местами.

Аналогично, парами противоположных чисел на гранях куба $3 \times 3 \times 3$ являются:

$1 \rightarrow 2 \times 1 = 2 \rightarrow 2 + 1 = 3$ $\rightarrow 2 \times 3 = 6 \rightarrow 6 + 1 = 7$ $\rightarrow 2 \times 7 = 14$	$14 \rightarrow \frac{14}{2} = 7 \rightarrow 7 - 1 = 6$ $\rightarrow \frac{6}{2} = 3 \rightarrow 3 - 1 = 2 \rightarrow \frac{2}{2} = 1$
Общая сумма этой цепи составляет $1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 14 = 33$	Общая сумма этой цепи составляет $1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 14 = 33$
$3 \rightarrow 2 \times 3 = 6 \rightarrow 6 + 1 = 7$ $\rightarrow 2 \times 7 = 14 \rightarrow 14 + 1 = 15$ $\rightarrow 2 \times 15 = 30$	$30 \rightarrow \frac{30}{2} = 15 \rightarrow 15 - 1 = 14$ $\rightarrow \frac{14}{2} = 7 \rightarrow 7 - 1 = 6 \rightarrow \frac{6}{2} = 3$
Общая сумма этой цепи составляет $3 + 6 + 7 + 14 + 15 + 30 = 75$	Общая сумма этой цепи составляет $3 + 6 + 7 + 14 + 15 + 30 = 75$
$5 \rightarrow 2 \times 5 = 10 \rightarrow 10 + 1 = 11$	$46 \rightarrow \frac{46}{2} = 23 \rightarrow 23 - 1 = 22$

$\rightarrow 2 \times 11 = 22 \rightarrow 22 + 1 = 23 \rightarrow 2 \times 23 = 46$	$\rightarrow \frac{22}{2} = 11 \rightarrow 11 - 1 = 10 \rightarrow \frac{10}{2} = 5$
Общая сумма этой цепи составляет $5+10+11+22+23+46=117$	Общая сумма этой цепи составляет $5+10+11+22+23+46=117$
$7 \rightarrow 2 \times 7 = 14 \rightarrow 14 + 1 = 15 \rightarrow 2 \times 15 = 30 \rightarrow 30 + 1 = 31 \rightarrow 2 \times 31 = 62$	$62 \rightarrow \frac{62}{2} = 31 \rightarrow 31 - 1 = 30 \rightarrow \frac{30}{2} = 15 \rightarrow 15 - 1 = 14 \rightarrow \frac{14}{2} = 7$
Общая сумма этой цепи составляет $7+14+15+30+31+62=159$	Общая сумма этой цепи составляет $7+14+15+30+31+62=159$
$9 \rightarrow 2 \times 9 = 18 \rightarrow 18 + 1 = 19 \rightarrow 2 \times 19 = 38 \rightarrow 38 + 1 = 39 \rightarrow 2 \times 39 = 78$	$78 \rightarrow \frac{78}{2} = 39 \rightarrow 39 - 1 = 38 \rightarrow \frac{38}{2} = 19 \rightarrow 19 - 1 = 18 \rightarrow \frac{18}{2} = 9$
Общая сумма этой цепи составляет $9+18+19+38+39+78=201$	Общая сумма этой цепи составляет $9+18+19+38+39+78=201$

$(1 \leftrightarrow 14), (3 \leftrightarrow 30), (5 \leftrightarrow 46), (7 \leftrightarrow 62), (9 \leftrightarrow 78).$

Таким образом, мы получаем следующий способ заполнения чисел:

30	62	1
5	30	3
14	78	14

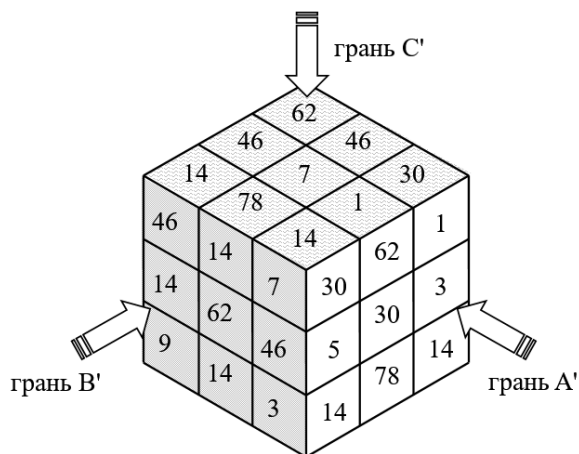
грань А'

46	14	7
14	62	46
9	14	3

грань В'

62	46	30
46	7	1
14	78	14

грань С'



Метод 1. Общая сумма чисел на гранях А', В', С' равна

$$\begin{aligned}
 &1 \times 2 + 3 \times 2 + 5 \times 1 + 7 \times 2 + 9 \times 1 + 14 \times 7 + \\
 &\quad + 30 \times 3 + 46 \times 4 + 62 \times 3 + 78 \times 2 = \\
 &= 2 + 6 + 5 + 14 + 9 + 98 + 90 + 184 + 186 + 156 = 750
 \end{aligned}$$

Метод 2. На гранях А, В и С расположены семь 1, три 3, четыре 5, три 7, две 9, две 14, две 30, одна 46, две 62 и одна 78, поэтому общая сумма чисел на гранях А', В', С' равна

$$\begin{aligned}
 &14 \times 7 + 30 \times 3 + 46 \times 4 + 62 \times 3 + 78 \times 2 + \\
 &\quad + 1 \times 2 + 3 \times 2 + 5 \times 1 + 7 \times 2 + 9 \times 1 = \\
 &= 98 + 90 + 184 + 186 + 156 + 2 + 6 + 5 + 14 + 9 = 750
 \end{aligned}$$

(b)

Метод 1. Сумма 6 чисел в каждой строке или в каждом столбце куба $3 \times 3 \times 3$ равна:

$$n + 2n + (2n + 1) + (4n + 2) + (4n + 3) + \\ + (8n + 6) = 21n + 12$$

Считая на 3 гранях куба $3 \times 3 \times 3$, мы видим, что:

- Количество граней блока с 1 или 14 равно 9.
- Количество граней блока с 3 или 30 равно 5.
- Количество граней блока с 5 или 46 равно 5.
- Количество граней с 7 или 62 равно 5.
- Количество граней блока с 9 или 78 равно 3.

Сумма 27 нечетных чисел на поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ равна

$$(9 \times 1) + (5 \times 3) + (5 \times 5) + (5 \times 7) + (3 \times 9) = 111.$$

Таким образом, сумма чисел на гранях всех кубиков равна

$$21 \times 111 + 27 \times 12 = 2655.$$

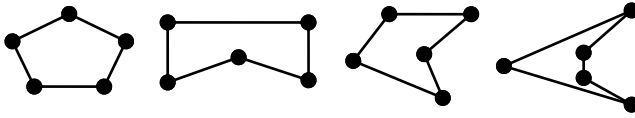
Метод 2. На гранях А, В и С находятся семь 1, три 3, четыре 5, три 7, две 9, две 14, две 30, одна 46, две 62 и одна 78, поэтому сумма чисел на гранях всех кубиков равна

$$7 \times 33 + 3 \times 75 + 4 \times 117 + 159 \times 3 + 201 \times 2 + \\ + 33 \times 2 + 75 \times 2 + 117 \times 1 + 159 \times 2 + 201 \times 1 = \\ = 297 + 375 + 585 + 795 + 603 = 2655$$

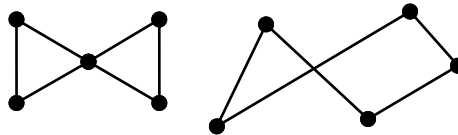
Ответ: (a) 750 , (b) 2655.

229. На плоскости существует 5 точек, таких, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Каждая пара точек соединена отрезком. Известно, что можно окрасить пять из этих сегментов в красный цвет, а остальные - в синий, так что все сегменты каждого цвета образуют простой пятиугольник. Нарисуйте один пример.

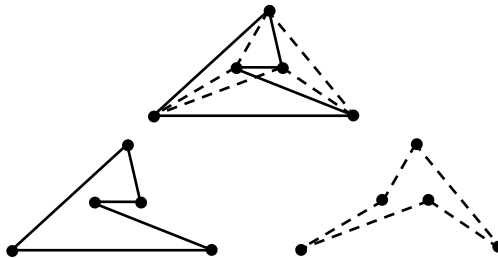
На рисунках ниже приведены примеры простых пятиугольников:



Следующие диаграммы НЕ являются простыми пятиугольниками (из-за самопересечений):



Решение: Обратите внимание, что пунктирные линии – это красные линии, а сплошные линии - синие линии.



230. В таблице 4×4 мы кладем монету в каждую ячейку. В некоторых ячейках монеты лежат решкой (Р), а во всех остальных - орлом вверх (О). За каждый ход вы можете изменить все записи в любой строке, столбце или диагонали. Диагонали могут быть длиной 1, 2, 3 или 4. Сделайте записи в таблицах ниже для всех (О), используя необходимое количество ходов. Покажите ваш ход.

(a) за 4 хода

(b) за 6 ходов

(c) за 6 ходов

O	P	O	O
O	O	O	O
P	O	O	O
O	O	O	O

O	P	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	P	O

O	O	O	O
O	P	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

Решение:

(a)

O	O	O	O
P	O	O	O
P	O	O	O
O	O	O	O

→

P	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
P	O	O	O

→

P	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

→

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

(b)

O	O	O	O
P	O	O	O
O	O	O	O
O	O	P	O

→

P	O	O	O
O	O	O	O
P	O	O	O
P	O	P	O

→

O	O	O	O
O	O	O	O
P	O	O	O
P	O	P	O

→

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
P	P	P	O

→

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	P

→

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

(c)

O	P	O	O
O	O	O	O
O	P	O	O
O	P	O	O

→

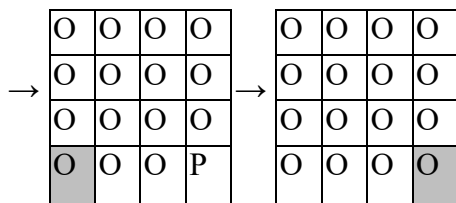
O	P	O	O
P	O	O	O
O	O	O	O
O	P	P	O

→

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
O	P	P	O

→

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
P	O	O	P



231. (a) В последовательности целых положительных чисел каждый член после первого равен сумме предыдущего члена и наибольшей цифры этого члена. Каково наибольшее возможное число последовательных нечетных членов в такой последовательности?

(b) В следующей последовательности $\{00, 01, 02, 03, \dots, 39\}$, члены были переставлены таким образом, что каждый член после первого получается из предыдущего путем увеличения или уменьшения одной из его цифр на 1. Например, за 29 может следовать 19, 39 или 28, но не 30 или 20. Какое наибольшее количество членов может остаться на своих местах?

Решение 1:

(a) Последовательность $\{817, 825, 833, 841, 849\}$ показывает, что ее длина может достигать 5. Теперь мы покажем, что оно не может быть больше. Пусть a_1 - первый член в самой длинной последовательности последовательных нечетных членов, а k - его наибольшая цифра. Чтобы a_2 было нечетным, k должно быть четным. Следовательно, это не последняя цифра a_1 . Если наибольшая цифра числа a_2 не равна k , то она будет нечетной, поскольку либо является последней цифрой a_2 , либо равна $k + 1$, поскольку все цифры, кроме последней, не могут увеличиваться более чем на 1 за раз. Отсюда следует, что первый член, наибольший разряд которого не равен k , также является последним из последовательных нечетных членов. Теперь четное число k относительно проста с 5. Следовательно, $a_1, a_2 = a_1 + k, a_3 = a_1 + 2k,$

$a_4 = a_1 + 3k$ и $a_5 = a_1 + 4k$ попарно неконгруэнтны по модулю 5. Поскольку все они нечетные, одно из них должно оканчиваться на 9. Тогда 9 будет наибольшей цифрой этого числа. Следовательно, максимальная длина последовательности последовательных нечетных членов равна 5.

Решение 2:

(a) Поскольку нечетное число плюс четное равно нечетному, наибольшая цифра члена перед последним членом не может быть 9, иначе следующий член будет четным числом, следовательно, 8 возможно. Предположим, что последняя цифра последнего члена равна 9, тогда последние цифры предыдущих членов равны 1, $11 - 8 = 3$, $21 - 16 = 5$, $31 - 24 = 7$, а последняя цифра следующего члена равна $41 - 32 = 9$. Это невозможно. Следовательно, наибольшее возможное число последовательных нечетных членов равно 5. Например, $\{807, 815, 823, 831, 839\}$.

(b) На клетках шахматной доски 4×10 обозначьте члены последовательности в их естественном порядке, ряд за рядом слева направо и сверху вниз. Начиная с 00 в левом верхнем углу, все допустимые ходы - на соседние клетки, либо по вертикали, либо по горизонтали, но не по диагонали. Таким образом, требуемая перестановка - это тур ладьи. Выполните первый ряд слева направо, перейдите ко второму ряду и выполните его справа налево, затем перейдите к третьему ряду и выполните его слева направо, и так далее. В итоге мы получим 30 в левом нижнем углу, а все члены последовательности в нечетных рядах расположены в естественном порядке. Мы утверждаем, что это единственные члены, которые могут это сделать. Раскрасьте квадрат в белый цвет, если сумма двух цифр его последовательности четная, и в черный, если нечетная. Затем квадраты в туре ладьи чередуются по цвету, начиная с белого и заканчивая черным. Член последовательности

может оставаться в своем естественном порядке, только если он четный и белый, или нечетный и черный. Этим свойством обладают только квадраты в нечетных рядах. Следовательно, максимум равен 20.

Ответ: (a) 5, (b) 20.

232. (a) Шахматная фигура может стартовать в любом месте шахматной доски 7×7 . Она может перепрыгнуть через 4 или 5 свободных клеток по вертикали или горизонтали, но не может дважды посетить одну и ту же клетку. Сколько всего клеток может посетить фигура?

(b) Шахматная фигура может стартовать с любого места на 9×9 клетках шахматной доски. Она может перепрыгнуть через 5 или 6 свободных клеток по вертикали или горизонтали, но не может дважды побывать на одной и той же клетке. Сколько всего клеток может посетить фигура?

(c) Шахматная фигура может стартовать с любого места на 15×15 клетках шахматной доски. Она может перепрыгнуть через 8 или 9 свободных клеток по вертикали или горизонтали, но не может дважды побывать на одной и той же клетке. Сколько всего клеток может посетить фигура?

Решение:

(a) На рисунке ниже показана шахматная доска 7×7 , разделенная на центральный крест шириной 3 и четыре квадранта по 2×2 клетки в каждом.

6	8				5	7
14	16				13	15
3	1				4	2
11	9				12	10

Нумерация показывает, что все 16 клеток в четырех квадрантах могут быть посещены. Если можно посетить больше квадратов, то шахматная фигура должна посетить один из квадратов центрального креста. Однако с любой такой клетки фигура никогда не сможет попасть ни на одну из 16 клеток в четырех квадрантах. На самом деле, с любой такой клетки шахматная фигура посещает не более 4 клеток центрального креста.

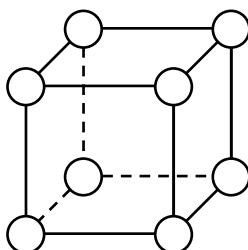
(b) На рисунке ниже показана шахматная доска 9×9 , разделенная на центральный крест шириной 3 и четыре квадранта по 3×3 клетки в каждом. Нумерация показывает, что все 36 квадратов в четырех квадрантах могут быть посещены. Если можно посетить больше квадратов, то шахматная фигура должна посетить один из квадратов центрального креста. Однако из любой такой клетки фигура никогда не сможет попасть ни в одну из 36 клеток в четырех квадрантах. На самом деле, с любой такой клетки шахматная фигура посещает не более 6 клеток центрального креста.

8	10	12				7	9	11
20	22	24				19	21	23
32	34	36				31	33	35
5	3	1				6	4	2
17	15	13				18	16	14
29	27	25				30	28	26

- (с) На рисунке ниже показана шахматная доска 15×15 , разделенная на центральный крест шириной 3 и четыре квадранта, каждый из которых представляет собой квадрат 6×6 . Нумерация показывает, что все 144 квадрата в четырех квадрантах могут быть посещены. Если можно посетить больше квадратов, то шахматная фигура должна посетить один из квадратов центрального креста. Однако из любой такой клетки фигура никогда не сможет попасть ни в одну из 144 клеток в четырех квадрантах. Даже если он сможет посетить все квадраты в центральном кресте, общее число 81 не дотягивает до 144.

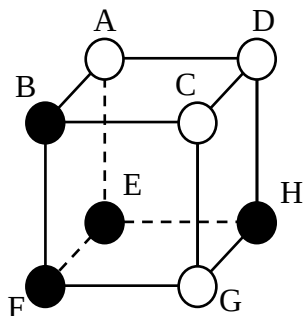
14	16	18	20	22	24				13	15	17	19	21	23
38	40	42	44	46	48				37	39	41	43	45	47
62	64	66	68	70	72				61	63	65	67	69	71
86	88	90	92	94	96				85	87	89	91	93	95
110	112	114	116	118	120				109	111	113	115	117	119
134	136	138	140	142	144				133	135	137	139	141	143
11	9	7	5	3	1				12	10	8	6	4	2
35	33	31	29	27	25				36	34	32	30	28	26
59	57	55	53	51	49				60	58	56	54	52	50
83	81	79	77	75	73				84	82	80	78	76	74
107	105	103	101	99	97				108	106	104	102	100	98
131	129	127	125	123	121				132	130	128	126	124	122

233. Раскрасьте четыре вершины куба в белый цвет и четыре вершины в черный цвет так, чтобы для любой плоскости, проходящей через три вершины одного цвета, в плоскости должна была быть четвертая вершина другого цвета.

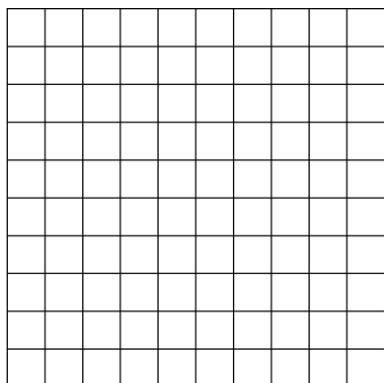


Решение:

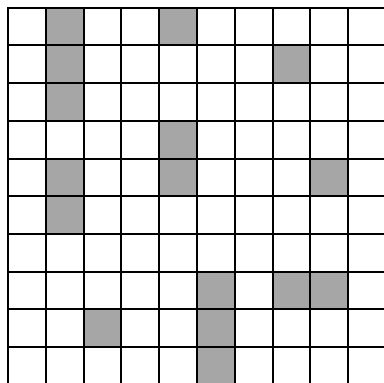
Пометьте вершины куба, как показано на рисунке ниже. Поскольку любая плоскость, проходящая через три вершины одного цвета, должна иметь четвертую вершину другого цвета, на нижней плоскости куба, предположим, что у нас есть 3 вершины, скажем, E, F и H черного цвета и 1 вершина, скажем G, цвет белый. Если плоскость CDHG имеет три вершины одного цвета и четвертую вершину другого цвета, то вершины C и D должны иметь одинаковый цвет, но у нас только 4 вершины черного цвета, следовательно, вершины C и D должны быть белого цвета. Если плоскость BFHD имеет три вершины одного цвета и четвертую вершину другого цвета, то вершина B должна быть черного цвета. Последняя вершина A должна быть белого цвета. Это один из многих возможных способов раскрасить вершины. BFE-A, VEN-C, BFH-D, FEH-G, ADC-B, ACG-E, ADG-F и DCG-H — искомые плоскости.



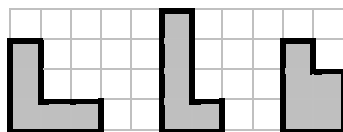
234. В игру «Линкор» играют на доске с одним линкором, двумя крейсерами, тремя эсминцами и четырьмя подводными лодками. Корабли размещаются на доске так, чтобы никакие два корабля не имели общие стороны или общие вершины. Однако корабли могут касаться краев доски. На доске, указанной в листе ответов, заштрихуйте возможное расположение двух крейсеров, трех эсминцев и четырех подводных лодок так, чтобы на доску не поместился линкор.



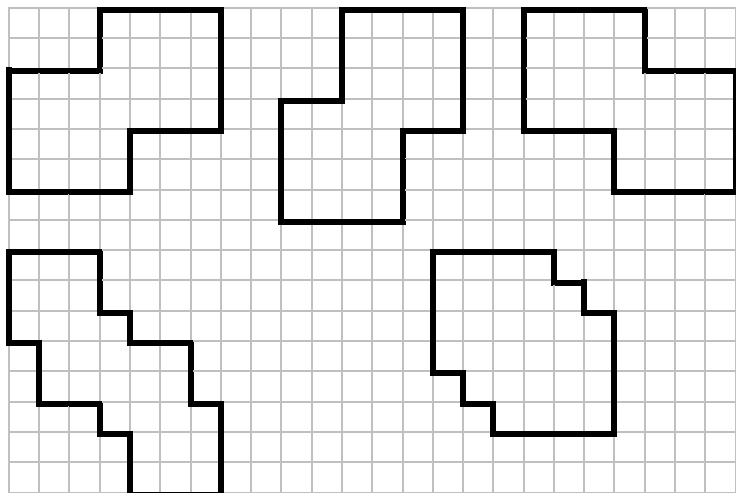
Решение: Одна из многих возможных конфигураций показана на схеме ниже. Очевидно, что для линкора места нет.



235. На диаграмме ниже показаны V-, L- и P-пентамино.

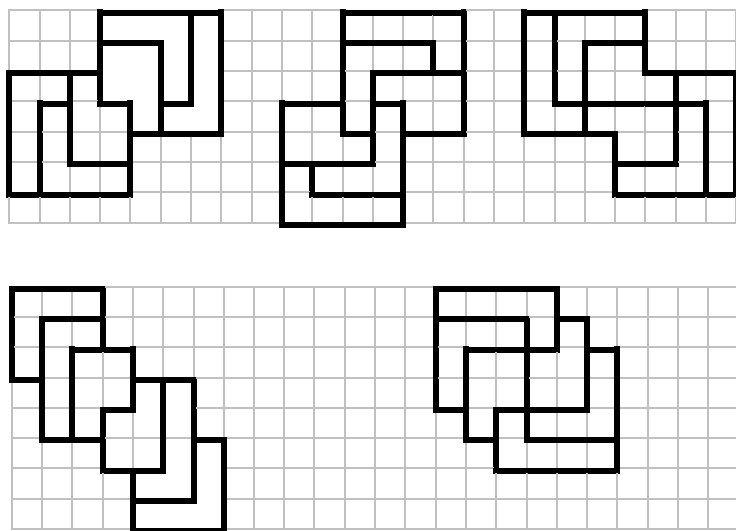


Используйте по две копии каждого V-, L- и P-пентамино, чтобы построить все приведенные ниже диаграммы.

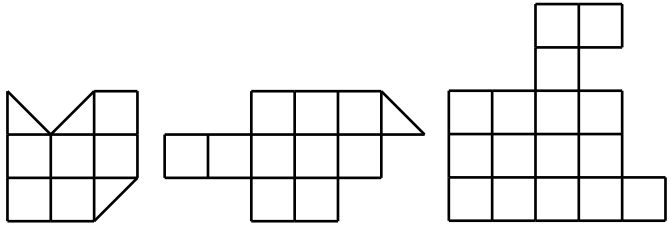


Части могут вращаться или отражаться

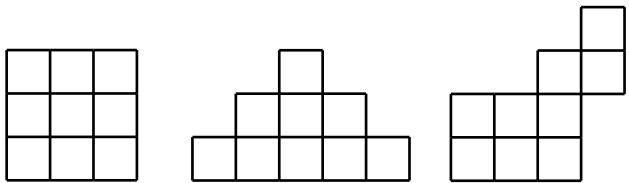
Решение:



236. (а) Разрежьте каждую фигуру на схеме ниже на две части так, чтобы каждая часть имела ось симметрии.

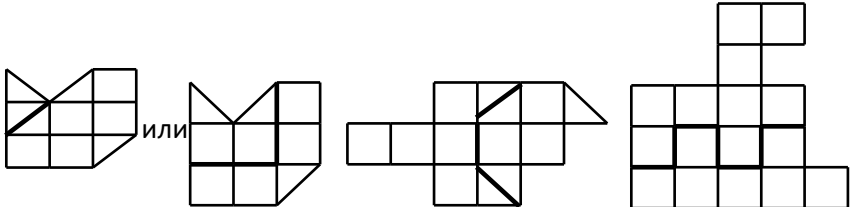


(б) Разрежьте каждую фигуру на схеме ниже на две части так, чтобы шесть частей состояли из трех одинаковых пар. Части можно вращать и отражать.

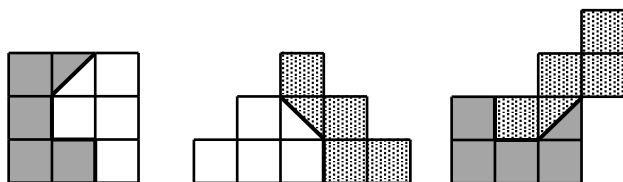


Решение:

(а) Разрезы показаны на схеме ниже.



(б) Разрезы показаны на схеме ниже.



237. Каждая из 36 ячеек таблицы должна быть заполнена числами 0, 1 или 2. Затем вычисляется сумма шести чисел в каждой строке и каждом столбце. Как заполнить ячейки, чтобы получить максимальное количество различных значений среди 12 сумм?

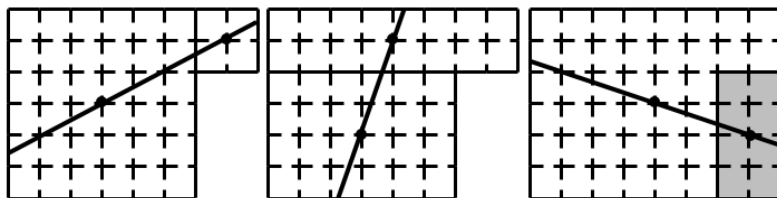
Решение: Обратите внимание, что значение каждой суммы составляет не более 12 и не менее 0. Таким образом, доступно 13 сумм. Сумма 12 сумм должна быть четной, поскольку каждое из 36 чисел складывается дважды. Следовательно, у нас все еще может быть двенадцать различных сумм, если мы опустим одну из четных. Поскольку получить одновременно и 12, и 0 непросто, мы опускаем одно из них. Задача действительно возможна, и один из возможных путей показан на схеме ниже.

2	2	2	2	2	2	12
2	2	2	2	2	1	11
2	2	2	2	1	0	9
2	1	1	0	0	0	4
1	1	0	0	0	0	2
1	0	0	0	0	0	1
10	8	7	6	5	3	сума

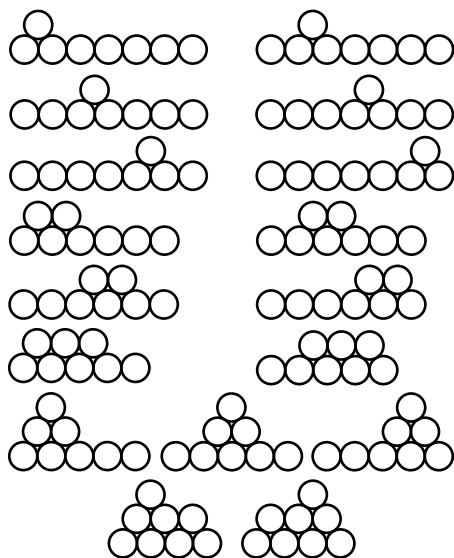
10. Ответы к задачам

- 6. 8
- 7. 41
- 8. 12
- 9. 10005
- 10. 15
- 11. 1111111101
- 12. 43
- 13. 60, 16, 6, 6, 6 и 6
- 14. 968
- 15. 50
- 16. 5
- 17. 2500 м
- 18. $54,6 \text{ см}^2$
- 19. 65
- 20. 55 км/ч
- 21. 20 с
- 22. 3000
- 23. 88
- 24. 2 раза
- 25. $1 \times 26 = 26, 2 \times 13 = 26, 6 \times 71 = 426,$
 $3 \times 82 = 246, 3 \times 88 = 8 \times 33 = 264$
- 26. 2 часа
- 27. 9
- 28. 4
- 29. 12:01
- 30. 4038

31. 774 цифры можно опустить, самое большое число
— это 999....99921
32. 987
33. 7
34. 41
35. 54, 56, 58, 59 и 62
36. 29
37. Пятница
38. 9 клеток
39. 5764
40. 3-4-7-9-3-6-4-8-3-5-7-4-6-9-2-5-8-2-7-6-2-5-1-9-1-8-1
41. 4
45. 38



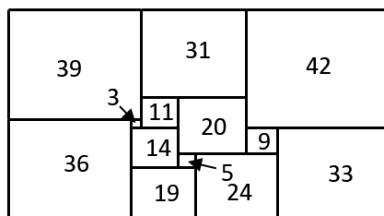
- 46.
47. 2025
48. 20
49. 2
50. 16
51. 48 см
52. 50 см²
53. 120 см²
54. 343
55. 40 см²



56.

57. 8 городов

58. 784913526



59.

62. 36 лет

63. 15689

64. 18

65. (3, 4, 5) и (5, 12, 13)

66. 3

67. 4486

68. 0

72. 99

73. 63 или 99

74. 0, 1, 3, 4, 5, 7 и 8

75. 402

76. 210

77. 158

- 78. 0
- 79. 12
- 80. 123475869
- 81. 285461659, 281612539
- 82. 1
- 83. 2012 раз
- 84. 1002
- 85. 23
- 86. 126
- 87. 40
- 88. 1155 дней
- 89. 49
- 90. 483
- 91. 42
- 92. 80 тарелок
- 93. 4
- 97. 270
- 98. 24
- 99. 7
- 100. 14 студентов в комнате А, 13 студентов в комнате В,
10 студентов в комнате С, 8 студентов в комнате D,
5 студентов в классе Е.
- 101. 2016
- 102. 17
- 103. 168
- 104. убыток 9%
- 105. Холли работала 3 часа, Молли 2 часа
- 106. 7
- 107. 12
- 108. 22
- 109. 7
- 113. 72
- 114. 72
- 115. 33
- 116. 78 дат

117.

9	—	5	=	4
				×
6	÷	3	=	2
				=
7	+	1	=	8

9	—	5	=	4
				×
6	÷	3	=	2
				=
1	+	7	=	8

118. 13

119. 145

120. 421

121. 243

122. 168

123. 8 или 26

124. 40 пар

125. 120

129. 15

130. 16

131. 9 призеров

132. Максимальное количество рукопожатий 81 и минимальное количество рукопожатий 17

133. 840 способов

134. 279720

135. 56

136. 115 способов

137. 288

138. 12

139. 90

140. 90 способов

141. 41

142. 512

143. 1296

146. 67

147. 75

148. 100900

149. 427

150. 17
154. 68%
155. 6750 рупий
156. $\frac{1}{2}$
157. 203
158. 5 : 6
159. 40
160. 150
161. $\frac{22}{3}$
162. $25\frac{620}{1001}$
163. 7
164. $\frac{1}{720}$
165. $38\frac{2}{3}$
166. 462
167. 64
172. 7 см²
173. 55 см²
174. 7 : 18
175. 1512 см²
176. 400 см²
177. 2 см
178. 5
179. 3 : 8 : 13
180. 18 см²
181. 25%
182. 6 : 1
183. 64 см²
184. 53 см²
185. 7 см
186. $\frac{1}{3}$
187. 32 см
188. 48 см²
189. 5 : 16

- 190. 224 м
- 191. 32см^2
- 192. 17 см^2
- 193. 46
- 194. 28
- 195. 558 см
- 196. 96 см^2
- 197. 1480 см^2
- 198. 30
- 199. 48 см^2
- 200. 2см^2
- 201. 171 см
- 202. 150 см^2
- 206. 180°
- 207. 180°
- 208. 20 см
- 209. 2
- 210. 158°
- 211. 150°
- 212. 44°
- 213. 139°
- 214. 96°
- 215. 0 км
- 217. 72 см^2
- 218. $\frac{6}{13}$
- 219. 384 см^2
- 220. 45°
- 222. 10 см^2
- 223. 1 : 2
- 224. 175 см^2
- 225. $6,3\text{ см}^2$
- 226. 10 см

11. Решения задач

6. Какая цифра стоит в позиции единиц в приведенном ниже выражении:

$$-1 \times 2018 + 2 \times 2017 - 3 \times 2016 + 4 \times 2015 + \dots - \\ -1003 \times 1016 + 1004 \times 1015?$$

Решение:

$$\begin{aligned} & -1 \times 2018 + 2 \times 2017 - \dots - 1003 \times 1016 + 1004 \times 1015 \\ & = 2 \times 2017 - 1 \times 2018 + 4 \times 2015 - 3 \times 2016 + \dots + \\ & \quad + 1004 \times 1015 - 1003 \times 1016 = \\ & = (2 \times 2017 - 1 \times (2017 + 1)) + (4 \times 2015 - \\ & \quad - 3 \times (2015 + 1)) + \dots + (1004 \times 1015 - \\ & - 1003 \times (1015 + 1)) = 2016 + 2012 + 2008 + \dots + 16 + \\ & \quad + 12 = \frac{(2016 + 12) \times 502}{2} = 509028 \end{aligned}$$

Следовательно, цифра в разрядах единиц равна 8.

Ответ: 8.

7. В ряд выстроено 81 солдат с номерами от 1 до 81. В каждом раунде солдаты называют свой номер 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, Все солдаты, посчитавшие 1 и 3, удаляются из строя. Процесс продолжается до тех пор, пока останется только один солдат. Какой номер последнего оставшегося солдата?

Решение: После первого раунда количество солдат, оставшихся на линии, следующее: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ..., 77, 80, всего 27 солдат.

После второго раунда количество солдат, оставшихся на линии, следующее: 5, 14, 23, 32, 41, 50, 59, 68, 77, всего 9 солдат.

После третьего раунда количество солдат, оставшихся на линии, следующее: 14, 41, 68, осталось 3 солдата.

После четвертого раунда на кону остался единственный солдат — 41.

Ответ: 41.

8. Чему равна сумма двух последних цифр произведения всех нечетных чисел от 1 до 2019?

Решение: Пусть P — произведение всех нечетных чисел от 1 до 2019. Понятно, что P делится на 25, тогда последние две цифры P должны быть либо 25, либо 75. С другой стороны, существует ровно 505 нечетных чисел между 1 и 2019, которые имеют остаток 3 при делении на 4, следовательно, P имеет остаток 3 при делении на 4. Из этого мы делаем вывод, что последние две цифры P должны быть 75, следовательно, сумма последних двух цифр равна $7 + 5 = 12$.

Ответ: 12.

9. Для любого целого положительного числа n мы определяем функцию $f(n)$ как сумму цифр n и количества цифр n . Например, $f(218) = 2 + 1 + 8 + 3 = 14$. (Примечание: первая цифра числа n , считая слева направо, не может быть равна 0). Какова сумма максимального и минимального значений n , при которых $f(n) = 6$?

Решение: Если n однозначное число, то $n = f(n) - 1 = 5$. Очевидно, что $n = 5$ - минимальное число, при котором $f(n) = 6$.

Так как $n \geq 1$, то наибольшее возможное число цифр числа n равно 5. Если n - пятизначное число, то сумма цифр n равна $f(n) - 5 = 1$. Легко видеть, что $n = 1000$ - это максимальное число, при котором $f(n) = 6$. Значит, их сумма равна $5 + 10000 = 10005$.

Ответ: 10005.

10. Когда двузначное число делится на сумму своих цифр, каков наибольший возможный остаток?

Решение: Обратите внимание, что остаток всегда строго меньше делителя. Так как наибольший делитель $9 + 9 = 18$, а $99 = 18 \times 5 + 9$ и остаток всего 9, то 17 недостижимо. Аналогично, $98 = 17 \times 5 + 13$ и $89 = 17 \times 5 + 4$ показывают, что 16 тоже недостижимо. Таким образом, наибольший остаток равен 15. Его можно получить из $79 = 16 \times 4 + 15$.

Ответ: 15.

11. Вычислите $9 + 99 + 999 + 9999 + 99999 + 999999 + 9999999 + 99999999 + 999999999$.

Решение: Если к каждому слагаемому добавим по 1, то получим:

$10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 + 1000000 + 10000000 + 100000000 + 1000000000$.

Следовательно, искомая сумма $1111111110 - 9 = 1111111101$.

Ответ: 1111111101.

12. Сумма 47 различных целых положительных чисел равна 2015. Какое максимальное количество нечетных чисел может быть?

Решение: Очевидно, что у нас должно быть нечетное количество нечетных целых чисел, иначе общая сумма НЕ будет нечетной.

Если имеется 45 различных нечетных целых чисел:

$$1 + 3 + \dots + 89 = 45^2 = 2025 > 2015.$$

Если имеется 43 различных нечетных целых числа:

$$1 + 3 + \dots + 85 = 43^2 = 1849.$$

Заметим, что $1 + 3 + \dots + 85 + (2 + 4 + 6 + 154) = 2015$.

Следовательно, не более 43 из них являются нечетными.

Ответ: 43.

13. Выпишите шесть натуральных чисел, сумма которых равна 100, таких, что каждое целое число содержит хотя бы одну цифру 6.

Решение: Обратите внимание, что каждое из шести чисел должно быть однозначным или двузначным. Если это однозначное число, его единственное возможное значение — 6. Если это двузначное число, то цифра десятков и единиц может быть равна 6. Чтобы их сумма была равна 100, ровно одно число должно иметь 6 как цифру десятков. Теперь пять из этих чисел должны иметь цифру единиц равную 6, так что цифра единиц шестого числа должна быть 0. Следовательно, наибольшее из этих чисел равно 60. Поскольку, $100 - 60 - 6 \times 5 = 10$, оставшиеся пять чисел будут равны 16, 6, 6, 6 и 6.

Ответ: 60, 16, 6, 6, 6 и 6.

14. Два числа называются зеркальными, если одно получается из другого изменением порядка его цифр. Например, таковыми считаются 123 и 321. Если произведение пары зеркальных чисел равно 146047, то чему равна сумма этой пары зеркальных чисел?

Решение: Поскольку, $146047 = 11^2 \times 17 \times 71$, одно из чисел не может быть $17 \times 71 = 1207$, следовательно, два числа должны быть $11 \times 17 = 187$ и $11 \times 71 = 781$, а их сумма равна $187 + 781 = 968$.

Ответ: 968.

15. Из набора чисел от 1 до 99 я выбираю как можно больше различных чисел так, чтобы ни одно подмножество выбранных мною чисел не имело сумму 100. Если я хочу, чтобы сумма всех выбранных мной чисел была как можно большей насколько это возможно, какое наименьшее возможное число я могу выбрать в качестве части подмножества?

Решение: Давайте сначала рассмотрим подмножество $\{50, 51, 52, \dots, 97, 98, 99\}$, поскольку среди целых чисел от 1 до 99 есть 49 пар, сумма которых равна 100 (например, 1 и 99, 2 и 98, ..., 49 и 51), поэтому из каждой такой пары я выбрал не более одного числа. Поскольку мне нужна максимальная сумма, я выбрал большее целое число в каждой паре. Это самые большие 49 целых чисел. Теперь мы также выбрали 50, поскольку у него нет пары или партнера, сумма которого равна 100. Мы не могли ввести другое целое число, не сформировав пару, сумма которой равна 100, поэтому наименьшее целое число в нашем выборе равно 50.

Ответ: 50.

16. Можно выразить число по основанию 8. Например, 37 можно записать как $(45)_8$ по основанию 8, потому что $(45)_8 = 4 \times 8 + 5 = 37$. С другой стороны, $(49)_8$ не существует, потому что $4 \times 8 + 9 = 41$ должно быть выражено как $(51)_8$. Пусть $\overline{AB}$ - двузначное простое число в степени основания 10, где $A, B < 8$. Если значение $(\overline{AB})_8$ также является простым числом по основанию 10, то сколько возможных значений $(\overline{AB})_8$ мы можем получить?

Решение: Заметим, что $(\overline{AB})_8 = 8A + B$, где $1 \leq A \leq 7$ и $B = 1, 3$ или 7 .

$\overline{AB}$	11	13	17	23	31	37	41
$(\overline{AB})_8$	9	11	15	19	25	31	33
$(\overline{AB})_8$ - простое число?	Нет	Да	Нет	Да	Нет	Да	Нет
$\overline{AB}$	43	47	53	61	67	71	73
$(\overline{AB})_8$	35	39	43	49	55	57	59
$(\overline{AB})_8$ - простое число?	Нет	Нет	Да	Нет	Нет	Нет	Да

Таким образом, существует 5 возможных значений $(\overline{AB})_8$, а именно 13, 23, 37, 53 и 73.

Ответ: 5.

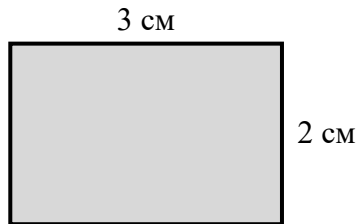
17. Четыре кубика с длиной ребра 1 м нужно разрезать на кубики меньшего размера, каждый с длиной ребра 4 см. Если все эти меньшие кубики поставить рядом друг с другом, образуя линию, какую длину в метрах они образуют.

Решение: Так как $1 \text{ м} = 100 \text{ см}$, то вдоль каждого ребра куба длиной 1 м расположены $100 \div 4 = 25$ кубиков со стороной 4 см. Итак, есть $25 \times 25 \times 25 \times 4$ кубика размером 4 см. Когда они располагаются рядом друг с

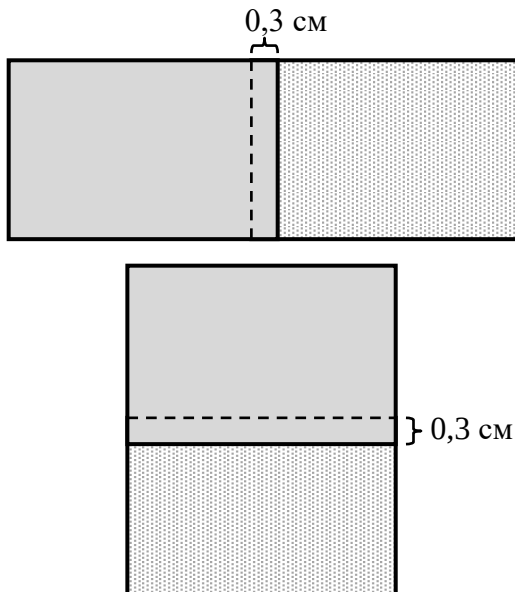
другом, образуя линию, ее длина будет равна $25 \times 25 \times 25 \times 4 \times 4 = 250000 \text{ см} = 2500 \text{ м}$.

Ответ: 2500 м.

18. Мисс Льен объединила десять прямоугольных карточек размером 2 см х 3 см, чтобы получился прямоугольник большего размера.



Если ширина перекрывающейся части между любыми двумя соседними картами равна 0,3 см (см. схему ниже), какова площадь (в см^2) самого большого прямоугольника, который она может создать?



Решение: Любой большой прямоугольник, который г-жа Лиен может сделать из десяти карточек, также можно сделать, начав с одной карты, а затем неоднократно добавляя новую карту к уже объединенной фигуре. Таких дополнений 9. При каждом добавлении площадь объединенной фигуры увеличивается на площадь вновь добавленной карты минус площадь ее перекрывающейся части. Следовательно, площадь окончательной фигуры равна общей площади 10 карточек минус общая площадь перекрывающихся частей. Площадь перекрываемой части – не менее $2 \times 0,3 = 0,6 \text{ см}^2$, следовательно, площадь конечной формы – не более $(2 \times 3) \times 10 - 0,6 \times 9 = 54,6 \text{ см}^2$. Эту область можно получить, объединив все 10 карт короткими сторонами в «длинный» прямоугольник, как показано ниже.



Ответ: $54,6 \text{ см}^2$.

19. Сумма пяти различных целых положительных чисел равна 364. Если наибольшее целое число равно 95, каково максимально возможное значение наименьшего из этих пяти целых чисел?

Решение: Обратите внимание, что сумма оставшихся четырех целых чисел равна $364 - 95 = 269$.

Теперь давайте рассмотрим следующую комбинацию чисел: 65, 67, 68 и 69. Обратите внимание, что мы не можем увеличить 65, не уменьшив некоторые другие значения, и это также приведет к двум одинаковым числам. Поскольку все числа должны быть различными, значение наименьшего целого числа не превышает 65.

Ответ: 65.

20. Палиндром — это число, которое читается одинаково как задом наперед, так и обратно. Одометр автомобиля показал 26962 км. После двух часов езды одометр показал следующий палиндром. Какова была средняя скорость автомобиля в км/ч?

Решение: Следующее число палиндрома после 26962 будет такого формата 27х72. Для ближайшего палиндрома x должен быть как можно меньшим; то есть, $x = 0$. Можно сделать вывод, что показание должно быть равным 27072, а расстояние, пройденное за 2 часа, рассчитается как $27072 - 26962 = 110$ км, отсюда следует, что средняя скорость — 55 км/ч.

Ответ: 55 км/ч.

21. Лиса видит пасущегося кролика в 21 метре от своего места. За одну секунду кролик смог пробежать 5 шагов, а лиса — только 3 шага. Известно также, что расстояние, пройденное лисой за 4 шага равно расстоянию, который пробежит кролик за 9 шагов. Если каждый шаг кролика равен 0,6 метра, то сколько секунд понадобится лисе, чтобы поймать кролика?

Решение: Скорость кролика $0,6 \times 5 = 3$ метр в секунду, а скорость лисы $0,6 \times 9 \div 4 \times 3 = 4,05$ метр в секунду. Время, необходимое лисе, чтобы поймать кролика, составляет $21 \div (4,05 - 3) = 20$ секунд.

Ответ: 20 с.

22. Али живет в Олтоне, а Бен живет в 12 км от него, в Бенбурге. Они хотят поехать в Сентервилль, который находится в 30 км от Олтона и в 20 км от Бенбурга. Бен просит Али взять такси из Олтона в Бенбург, чтобы забрать его, чтобы они вместе поехали в Сентервилль. Стоимость

такси 1000 рупий за км. Бен оплачивает часть стоимости проезда, возникающую из-за дополнительного расстояния, вызванного этим объездом, и поровну делит оставшуюся стоимость с Али. Сколько Бен сэкономит, разделив плату за такси с Али?

Решение: Дополнительное расстояние, вызванное объездом, составляет $20 + 12 - 30 = 2$ км, и Бен платит за это 2000 рупий. Оставшаяся стоимость остальных 30 км составляет 30000 рупий, половину из которых платит Бен. Следовательно, Бен платит в общей сложности $30000 \div 2 + 2000 = 17000$ рупий, тем самым экономя $20000 - 17000 = 3000$ рупий.

Ответ: 3000.

23. Из листа длиной 11 см и шириной 2 см вырезаются квадратные куски со стороной 0,5 см. Какое максимальное количество квадратов можно вырезать?

Решение: Нам необходимо разрезать данный лист по длине на куски $\frac{11}{0,5} = 22$ и разрезать по ширине на куски $\frac{2}{0,5} = 4$. Таким образом, общее количество квадратов, которые нужно вырезать из листа, равно $22 \times 4 = 88$.

Ответ: 88.

24. Имеется 15 настоящих монет одинакового веса и одна фальшивая монета, которая либо тяжелее, либо легче настоящей монеты. По крайней мере, сколько раз мы должны взвесить на двухчашечных весах, чтобы определить, тяжелее ли фальшивая монета или легче?

Решение: Очевидно, что мы не можем определить, на какой стороне весов с двумя чашками находится фальшивая

монета, взвесив только один раз, поэтому нам нужно взвесить как минимум 2 раза. Разделите 16 монет на две группы по 8 и взвесьте их друг против друга. Затем разделите 8 монет более легкой группы на две группы по 4 и взвесьте их друг против друга.

Если они не сбалансированы, фальшивая монета легче. Если они уравниваются, фальшивая монета тяжелее. Следовательно, для определения веса фальшивой монеты достаточно взвесить их как минимум дважды.

Ответ: 2 раза.

25. Кнопка «4» на моем калькуляторе неисправна, поэтому я не могу вводить числа, которые содержат цифру 4, поэтому я не могу ввести вычисление 2×14 и не пытаюсь это сделать. Более того, мой калькулятор также не отображает цифру 4, если 4 является частью ответа, поэтому, например, результат умножения 3 на 18 отображается как 5, а не как 54, а результат умножения 2 на 71 отображается как 12 вместо 142. Если я умножу положительное однозначное число на положительное двузначное число и на калькуляторе отображается 26, перечислите все такие пары чисел, которые я мог бы умножить?

Решение: Поскольку произведение представляет собой не более чем трехзначное число, возможные ответы, которые я могу получить, — 26, 426, 246 или 264. Поскольку

$$26 = 1 \times 26 = 2 \times 13$$

$$426 = 1 \times 426 = 2 \times 213 = 3 \times 142 = 6 \times 71$$

$$246 = 1 \times 246 = 2 \times 123 = \underline{3 \times 82} = 6 \times 41$$

$$264 = 1 \times 264 = 2 \times 132 = \underline{3 \times 88} = 4 \times 66 \\ = 6 \times 44 = \underline{8 \times 33} = 11 \times 24 = 12 \times 22$$

Итого имеем 6 пар.

Ответ: $1 \times 26 = 26, 2 \times 13 = 26, 6 \times 71 = 426,$
 $3 \times 82 = 246, 3 \times 88 = 8 \times 33 = 264$

26. Роберт купил две разные свечи. Отношение длины более короткой свечи к более длинной составляет $5 : 7$. Известно, что более длинная свеча, будучи зажженной, полностью сгорит через 3,5 часа, в то время как более короткая свеча, будучи зажженной, полностью сгорит через 5 часов. Если обе свечи зажечь одновременно, то через сколько часов длина двух свечей станет одинаковой?

Решение: Мы обозначаем более короткую свечу за 5 единиц, а более длинную — 7 единиц. Это означает, что скорость горения более длинной свечи каждый час равна $7 \div 3\frac{1}{2} = 2$, а скорость горения более короткой свечи каждый час $5 \div 5 = 1$. Каждый час более длинная свеча сгорает на единицу быстрее, чем более короткая.

Более длинная свеча на $7 - 5 = 2$ единицы длиннее более короткой. Следовательно, через $2 \div 1 = 2$ часа длина двух свечей будет точно равна.

Ответ: 2 часа.

27. В классе из 25 детей 12 носят очки и 11 носят брекеты. Если 7 носят и очки, и брекеты, то каково число тех, которые не носят ни того, ни другого?

Решение: Каждый из 7 детей, носящих и то, и другое, учитывается один раз среди 12 детей, носящих очки, и один раз среди 11 детей, носящих брекеты. Следовательно, общее число детей, носящих только очки или только брекеты, или и то, и другое, равно $12 + 11 - 7 = 16$. Таким образом, число детей, не носящих ни того, ни другого, равно $25 - 16 = 9$.

Ответ: 9.

28. В опросе участвовали 100 студентов. 84 сказали, что им нравится играть в теннис, 74 сказали, что им нравится

кататься на лыжах, а 62 студента сказали, что им нравится играть в теннис и кататься на лыжах. Сколько студентов не любят играть одновременно в теннис и кататься на лыжах?

Решение: Есть $84 + 74 - 62 = 96$ студентов, которые любят играть в теннис или кататься на лыжах, поэтому есть $100 - 96 = 4$ студентов, которые не любят одновременно играть в теннис и кататься на лыжах.

Ответ: 4.

29. Мои двенадцатичасовые цифровые часы имеют четыре цифры, две из которых обозначают час, а две другие - минуты. Минуты отображаются с ведущими 0, а часы - нет. В перевёрнутом виде цифры 0, 1, 2, 5, 6, 8 и 9 читаются как 0, 1, 2, 5, 9, 8 и 6 соответственно. Однажды я сделал телефонный звонок в назначенное время и узнал, что это было слишком рано. Затем я понял, что прочитал время на часах вверх ногами. Если вы знаете, на сколько времени я позвонил раньше, вы будете знать, во сколько я позвонил. Во сколько я должен был позвонить?

Решение: Первая и последняя цифры могут быть только 1, а средние две цифры должны быть разными, чтобы мой звонок был ранним. Значит, я, должно быть, перепутал 10:11 с 11:01, 10:21 с 12:01 или 11:21 с 12:11.

В первом и третьем случаях я бы позвонил раньше на 50 минут. Во втором случае я бы позвонил раньше на 100 минут. Если бы я набрал номер на 50 минут раньше, вы не могли бы сказать, в 10:11 или в 11:21 я позвонил. Следовательно, я должен был позвонить на 100 минут раньше и осуществить звонок в 12:01.

Ответ: 12:01.

30. Мы помещаем 2018 точек в квадрат, затем делим квадрат на треугольники, вершинами которых являются эти 2018 точек и 4 вершины квадрата (то есть всего у нас 2022 точки, которые являются вершинами треугольников). Для каждого треугольника каждая точка является либо одной из его вершин, либо полностью лежит вне треугольника. На сколько треугольников разделен квадрат?

Решение: Если внутри квадрата есть только одна точка, она разделит квадрат на 4 треугольника. Если внутри квадрата всего две точки, то он разделится на 6 треугольников. За каждую добавленную точку мы получим на 2 треугольника больше. Таким образом, всего получится $4 + 2017 \times 2 = 4038$ треугольника.

Ответ: 4038.

31. Каково максимальное количество цифр, которое можно удалить из 1000-значного номера 20192019...2019, чтобы сумма оставшихся цифр была равна 2019? Каково наибольшее получившееся число?

Решение: В 1000-значном номере содержится 250 блоков «2019». Сумма всех цифр числа 201920192019....20192019 равна сумме следующих чисел:

$$250 \times 2 = 500, 250 \times 1 = 250, 250 \times 9 = 2250.$$

Поскольку мы хотим опустить максимально возможное количество цифр, нам следует оставить как можно больше 9. Сумма всех девяток в основном числе равна 2250, но нам нужно только 2019.

Так как $2250 - 2019 = 231$ и $231 = 9 \times 25 + 6$, нам следует опустить 26 девяток из 250 существующих девяток в основном числе, т.е. оставить 224 девятки. Поскольку $224 \times 9 = 2016$, то нам нужно еще 3, чтобы получить 2019. Поскольку мы хотим найти максимальное количество удаленных цифр, нам следует оставить 1 из 1 и 1 из 2. Итак,

из всех 1000 цифр мы сохранили цифры $224 + 1 + 1 = 226$, т. е. цифры $1000 - 226 = 774$ можно опустить. А самое большое число, которое можно составить из оставшихся цифр, — это 999....99921, в котором цифра 9 использовалась 224 раза.

Ответ: 774 цифры можно опустить, самое большое число — это 999....99921.

32. На окружности 1500 красных точек и 513 белых точек. Мы пишем 1 между двумя красными точками, -1 между двумя белыми точками, и 0 между двумя точками, которые имеют разные цвета. Какова сумма чисел 2013, которые мы написали на этом круге?

Решение: Сначала мы рассматриваем только 1500 красных точек, затем будет 1500 копий 1, а их сумма равна 1500. Теперь давайте по одной введем белые точки. Если он попадает между двумя красными точками, мы заменяем 1 двумя 0. Если он приземлится между двумя белыми точками, мы заменяем -1 двумя -1 . Если он попадает между двумя точками разного цвета, мы заменяем 0 на -1 и 0. Во всех случаях обратите внимание, что сумма всегда уменьшается на 1. Когда все 513 белых точек будут введены, сумма будет уменьшена до $1500 - 513 = 987$.

Ответ: 987.

33. 120 скаутов стоят в кругу, на равном расстоянии друг от друга вокруг костра. Они начинают выкрикивать 1, 2, 3, ... по часовой стрелке и Кит называет 55. Если счет начинается с того же человека, но продолжается против часовой стрелки, то какой номер назовет разведчик напротив Кита?

Решение: За Китом по часовой стрелке идут $120 - 55 = 65$ скаутов. А позиция Кита против часовой стрелки равна

$1 + 65 + 1 = 67$. Следовательно, число, которое назовет разведчик напротив Кита, равно $67 - (120 \div 2) = 7$.

Ответ: 7.

34. Билеты на музыкальное шоу нумеровались последовательно, начиная с 1. Известно, что один номер билета был продан дважды по ошибке, а все остальные номера билетов были проданы ровно один раз. Сумма всех проданных номеров билетов равна 1316. Какой номер билета был продан дважды?

Решение: Пусть будет число проданных билетов $n + 1$, из которых билет с номером m ($m \leq n$) был продан дважды.

У нас есть $1 + 2 + \dots + n < 1316 = 1 + 2 + \dots + n + m$

и $1316 = 1 + 2 + \dots + n + m < 1 + 2 + \dots + (n + 1)$.

Следовательно,

$$n^2 < n(n + 1) = 2632 - 2m < 2632 < (n + 1)(n + 2).$$

Поэтому $n < 51$. Поскольку,

$50 \times 551 = 2550 < 2632 < 51 \times 52 = 2652$, мы получаем

$$n = 50 \text{ и } m = \frac{2632 - 2550}{2} = 41.$$

Ответ: 41.

35. Каждая пара из пяти натуральных чисел складывается так, что получается десять сумм: 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 и 121. Какое из этих пяти целых чисел является наибольшим?

Решение: Сумма 10 пар равна 1156. Поскольку каждое число складывается 4 раза, сумма 5 чисел равна

$1156 \div 4 = 289$. Поскольку сумма двух наибольших по величине чисел равна 121, а сумма наименьших по величине чисел равна 110, следовательно, среднее число равно $289 - 121 - 110 = 58$. Второе по величине число на

$121 - 120 = 1$ больше среднего числа и, следовательно, равно $58 + 1 = 59$. Отсюда следует, что наибольшее число — $121 - 59 = 62$. Теперь мы рассматриваем следующий сценарий. Если сумма второго наименьшего и среднего чисел равна 112, то второе наименьшее число равно $112 - 58 = 54$, а наименьшее число $110 - 54 = 56$, что является противоречием. Это означает, что 112 — это сумма наименьшего и среднего числа, поэтому наименьшее число — 54, а второе наименьшее — 56.

Следовательно, пять целых чисел — 54, 56, 58, 59 и 62.

Ответ: 54, 56, 58, 59 и 62.

36. Дано пятьдесят последовательных нечетных чисел: 1921, 1923, 1925, ..., 2015, 2017, 2019. Каково наименьшее количество чисел, которое нужно выбрать из заданного набора, чтобы убедиться в том, что хотя бы одна пара выбранных чисел в сумме дает 3930?

Решение: Разделите последовательность на 22 пары: {1921, 2009}, {1923, 2007}, ..., {1963, 1967} и 6 непарных чисел: {1965}, {2011}, {2013}, {2015}, {2017}, {2019}. Сумма двух чисел в последовательности равна 3930 тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же паре.

Для $n \geq 29$, любая выборка из n (разных) чисел в последовательности содержит два числа, принадлежащих одной и той же паре. Сумма этих двух чисел равна 3930.

Для $n \leq 28$ мы можем выбрать n чисел так, чтобы в каждой паре было выбрано не более одного числа. В данной выборке нет двух чисел, сумма которых равна 3930.

Ответ: 29.

37. В телешоу 483 серии. Если шоу начинается в субботу и транслируется каждый день по три серии, в какой день будет транслироваться последняя серия?

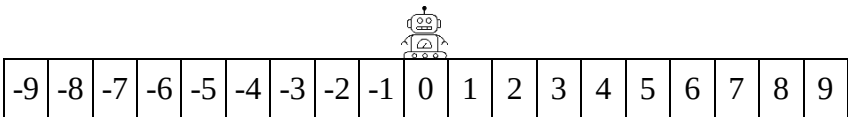
Решение: Поскольку каждый день транслируется три серии, на трансляцию 483 серий уйдет $483 \div 3 = 161$ день. Поскольку суббота считается первым днем трансляции и $161 = 23 \times 7$, поэтому последняя серия будет транслироваться в пятницу.

Ответ: пятница.

38. Робот IMSO стоит на средней ячейке платы, как показано на схеме ниже. Он запрограммирован на 5 ходов. Направления ходов чередуются между левым и правым (первый ход может быть в любом направлении). За каждый ход робот перемещается на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток от своей позиции; робот не должен выезжать за пределы доски. Более того, каждый номер может быть использован ровно один раз. Сколько клеток на этой доске, на которых робот не может оказаться после 5 ходов?



Решение: Для удобства будем рассматривать доску как числовую прямую и робота, начинающего в начале координат.



Напомним, что сумма двух нечетных чисел всегда четна, сумма двух четных чисел всегда четна, а сумма двух чисел разной четности всегда нечетна. Тогда сумма трех нечетных чисел всегда нечетна. Рассмотрим числа 1, 2, 3, 4 и 5: если эти числа объединить путем сложения или вычитания, результат всегда будет нечетным. Следовательно, робот IMSO не может оказаться ни в одной

четной ячейке, то есть он не может приземлиться в 9 ячейках.



Робот может оказаться в любой нечетной ячейке, например, при помощи следующих комбинаций (показаны комбинации для положительных ячеек, комбинации для отрицательных можно получить, поменяв местами П и Л):

$$1 = 1(\text{П}) - 5(\text{Л}) + 4(\text{П}) - 2(\text{Л}) + 3(\text{П})$$

$$3 = 5(\text{П}) - 4(\text{Л}) + 3(\text{П}) - 2(\text{Л}) + 1(\text{П})$$

$$5 = 5(\text{П}) - 3(\text{Л}) + 4(\text{П}) - 2(\text{Л}) + 1(\text{П})$$

$$7 = 5(\text{П}) - 1(\text{Л}) + 4(\text{П}) - 2(\text{Л}) + 3(\text{П})$$

$$9 = 5(\text{П}) - 1(\text{Л}) + 4(\text{П}) - 2(\text{Л}) + 3(\text{П})$$

Ответ: 9 клеток.

39. Лайла, Мэри и Нелли по очереди выбирали бусины из коробки по следующей возрастающей схеме: Лайла выбрала 1 бусину, Мэри выбрала 2 бусины, Нелли выбрала 3 бусины, затем Лайла выбрала 4 бусины, Мэри выбрала 5 бусин, Нелли выбрала 6 бусин и снова Лайла выбрала 7 бусин и так далее. Когда количество оставшихся бусин было меньше, чем количество бусин, необходимых для следующего хода, все эти бусины доставались девушке, которая была в очереди раньше. В итоге Лайла получила в общей сложности 2019 бусин. Сколько бусин было в коробке в начале?

Решение: После n ходов, если это не последний ход, количество бусинок, которые выберет Лейла, составит

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

Если 37 ход дает $\frac{37(3 \times 37 - 1)}{2} = 2035$ бусин и 36 ход дает $\frac{36(3 \times 36 - 1)}{2} = 1926$ бусин, следовательно, Лейла делает

последний ход, Мэри и Нелли делают 35 ходов, Лейла делает 36 ходов и забирает все оставшиеся бусины.

Количество бусинок, которые выберут Мэри, Нелли и Лейла, равно:

$$M = 2 + 5 + 8 + \dots + 104 = 1855 \text{ (после 35 ходов),}$$

$$N = 3 + 6 + 9 + \dots + 105 = 1890 \text{ (после 35 ходов),}$$

$$L = 2019 = (1 + 4 + \dots + 106 + 93)$$

Следовательно, количество бусин в исходной коробке равно $1855 + 1890 + 2019 = 5764$.

Ответ: 5764 бусины.

40. Двадцать семь цифр, состоящих из 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, должны быть заполнены и расположены в ряду ячеек таким образом, чтобы каждая цифра использовалась три раза. Между первой 1 и второй 1 находится еще одна цифра, и еще одна цифра между второй 1 и третьей 1. Есть еще две цифры между первой 2 и второй 2, и еще две цифры между второй 2 и третьей 2. То же самое относится и к другим цифрам, так что есть девять цифр между первой 9 и второй 9, и девять других цифр между второй 9 и третьей 9.

[illegible]

Средние семь цифр - 7469258. Заполните поля ниже.

Решение: Применяя условия, можно сказать, что данная 4 должна быть последней, данная 9 должна быть второй, данная 2 должна быть первой и 8 должна быть второй. Это позволит нам заполнить оставшиеся 4, 9, 2 и 8, как показано на схеме ниже.

4	9		4	8		7	4	6	9	2	5	8	2		2		9	8
---	---	--	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	--	---	---

Теперь данная 5 должна быть второй. Если она первая, то последняя 5 выйдет за край ряда, а если последняя, то первые 5 приземлятся на то же место, что и первая 9. Мы можем добавить еще по одному для каждого из 7 и 6, придя к диаграмме ниже.

4	9		4	8	5	7	4	6	9	2	5	8	2	7	6	2	5	9	8	
---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Теперь ясно, что три тройки находятся ближе к началу, а три единицы — к концу. Теперь завершить всю строку не составит труда.

Ответ:

3	4	7	9	3	6	4	8	3	5	7	4	6	9	2	5	8	2	7	6	2	5	1	9	1	8	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

41. Трехзначное число умножается на двузначное число, у которого цифра десятков равна 9. Произведением является четырехзначное число, у которого цифра сотен равна 2. Сколько трехзначных чисел удовлетворяют этому условию?

Решение: Поскольку произведение представляет собой четырехзначное число, а двузначное число начинается с 9, то первая цифра произведения должна быть 9, а первая цифра трехзначного числа должна быть 1; в противном случае результат будет пятизначным или шестизначным числом.

Теперь мы можем выразить выражение умножения в виде $\overline{1ab} \times \overline{9c} = \overline{92de}$. Обратите внимание, что c может принимать только значения $c = 0, 1$ или 2 , поскольку $93 \times 100 > 9299$.

Проверяя каждый случай, мы имеем следующее:

Если $c = 2$, то $\overline{1ab} \times 92 = \overline{92de}$, таким образом, мы можем взять $\overline{1ab} = 100$ или 101 .

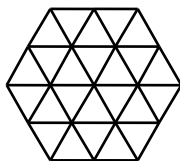
Если $c = 1$, то $\overline{1ab} \times 91 = \overline{92de}$, таким образом, мы можем взять $\overline{1ab} = 102$.

Если $c = 0$, то $\overline{1ab} \times 90 = \overline{92de}$, таким образом, мы можем взять $\overline{1ab} = 103$.

Итак, всего имеется 4 трёхзначных числа, удовлетворяющих условиям.

Ответ: 4.

45. Сколько равносторонних треугольников всех возможных размеров и направлений на схеме ниже?



Решение: Число треугольников площадью 1 равно 24.

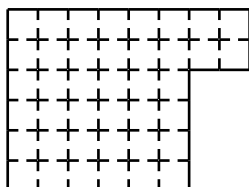
Число треугольников площадью 4 равно 12.

Число треугольников площадью 9 равно 2.

Следовательно, общее число треугольников равно $24 + 12 + 2 = 38$.

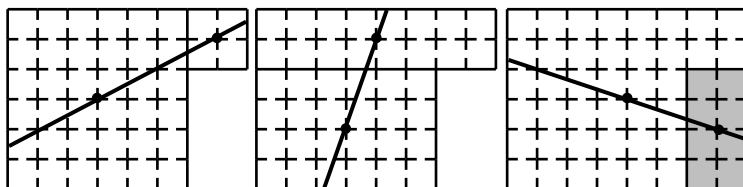
Ответ: 38 равносторонних треугольников.

46. Предложите три различных способа разделить приведенную ниже диаграмму на две части, имеющие одинаковую площадь, используя только одну прямую линию.

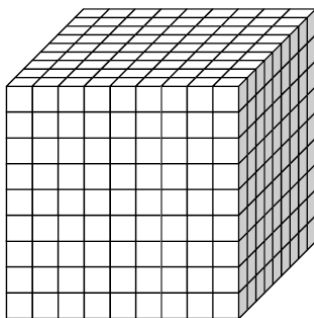


Решение: Представим диаграмму как сумму двух прямоугольников на двух фигурах и как разность двух прямоугольников на одной фигуре. В каждом случае линия, проходящая через центр прямоугольника, делит его на две части равной площади. Таким образом, мы используем линию, соединяющую центры двух прямоугольников, как показано на схеме ниже.

Ответ :



47. Куб $9 \times 9 \times 9$ образуется из 729 кубиков, каждый размером $1 \times 1 \times 1$. Сколько кубиков разного размера можно найти в кубе $9 \times 9 \times 9$? (Примечание: два кубика одинакового размера, но расположенные в разных местах, должны считаться как два разных кубика)



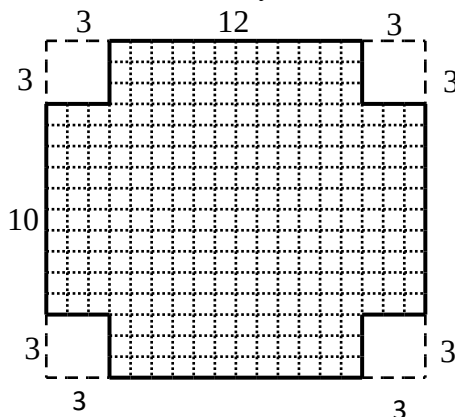
Решение: Число способов выбрать параллельные прямые вдоль граней исходного куба, расстояния которых друг от друга соответственно равны 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, равно 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Таким образом, число кубов, длина сторон которых равна 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, равно

$9^3, 8^3, \dots, 3^3, 2^3, 1^3$. Из этого следует, что общее количество кубиков разных размеров, содержащихся в кубе $9 \times 9 \times 9$, равно

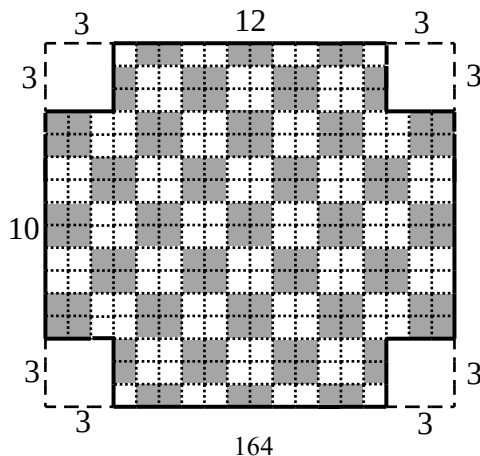
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 8^3 + 9^3 = \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)^2 = 2025$$

Ответ: 2025.

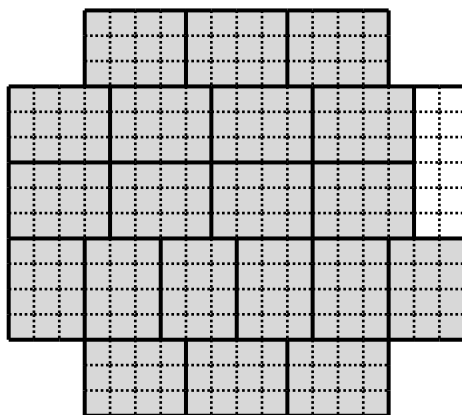
48. Дан лист бумаги размером 16 на 18 см, с каждого угла отрезается квадрат 3 на 3 см, как показано на схеме ниже. Какое максимальное возможное количество прямоугольников размером 3×4 см можно отрезать от оставшейся части этого листа бумаги?



Решение:



Раскрасьте квадраты единичных квадратов в черный и белый цвета, как показано на схеме. Каждый прямоугольник размером 3×4 см покрывает по 6 квадратов каждого цвета. Однако есть 128 красных квадратов и 124 белых квадрата. Обратите внимание, что $\frac{124}{6} = 20\frac{2}{3}$. Следовательно, от оставшейся части бумаги можно отрезать максимум 20 прямоугольников. На диаграмме ниже показан пример 20 отрезанных прямоугольников.

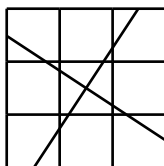


Ответ: 20.

49. Мы хотим провести на шахматной доске такое количество прямых линий, которые должны проходить через внутренние точки всех клеток доски. По крайней мере, сколько линий нам нужно нарисовать на шахматной доске 3×3 ?

Решение: Шахматная доска имеет две вертикальные линии и две горизонтальные линии сетки. Когда линия переходит из одного квадрата в другой, она должна пересекать хотя бы одну линию сетки. Поскольку две прямые могут пересекаться не более одного раза, линия может пересекать линии сетки не более 4 раз, так что она может проходить

через внутреннюю точку, состоящую не более чем из 5 ячеек. У нас 9 ячеек, нужно как минимум две строки. Следующая диаграмма показывает, что две линии будет достаточно.



Ответ: 2.

50. В таблице ниже, каждая буква обозначает целое число от 1 до 7. При сравнении суммы чисел в любой строке или столбце с суммой чисел в других строках или столбцах эти суммы должны быть одинаковой четности (либо обе четные, либо обе нечетные) и отличаться не более чем на 2. Найдите сумму всех возможных значений a .

a	b	
c	d	e
	f	g

Решение: Суммы каждой строки/столбца должны иметь одинаковую четность и отличаться не более чем на 2.

Так как $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, то сумма каждой строки/столбца равна 8 или 10.

Предположим, что сумма первого столбца равна 10, а сумма первой строки - 8 (невозможно, чтобы оба столбца были равны 10 или 8).

Тогда $a \neq 4$ или 5, а может быть только 3, 6 или 7. Ниже перечислены возможные случаи для 3, 6 или 7.

6	2	
4	1	5
	7	3

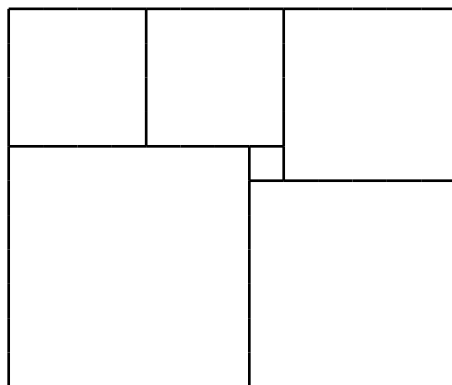
7	1	
3	5	2
	4	6

3	5	
7	1	2
	4	6

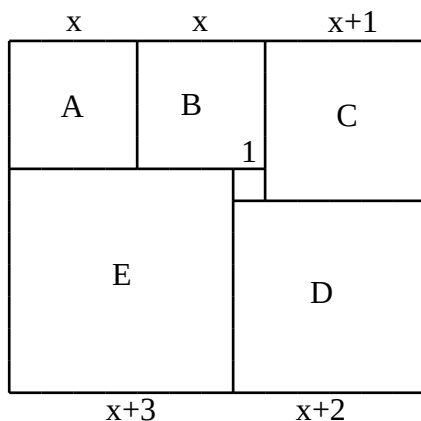
Поэтому сумма всех возможных значений a равна $3 + 6 + 7 = 16$.

Ответ: 16.

51. Прямоугольник разделен на несколько маленьких квадратов, как показано на схеме ниже. Учитывая, что длина стороны наименьшего квадрата равна 1 см, каков периметр прямоугольника в см?



Решение: Подпишем квадраты, кроме самого маленького, как показано на рисунке. Предположим, что длина стороны квадрата А равна x см, тогда длины сторон квадрата В, С, D и Е равны x , $x + 1$, $(x + 1) + 1 = x + 2$ и $(x + 2) + 1 = x + 3$ соответственно.



Ширина наибольшего прямоугольника равна сумме длин сторон квадратов А, В и С, что составляет $2x + (x + 1) = 3x + 1$ см.

С другой стороны, ширина самого большого прямоугольника также равна сумме длин сторон квадратов D и E, что составляет $(x + 2) + (x + 3) = 2x + 5$ см. Отсюда следует, что $3x + 1 = 2x + 5$, а значит, $x = 4$ см. Следовательно, периметр наибольшего прямоугольника равен $2((3x + 1) + (x + 1 + x + 2)) = 2(5x + 4) = 48$ см.

Ответ: 48 см.

52. У мр. Нама есть 10 кубовидных призм: одна размером $2\text{ см} \times 2\text{ см} \times 2\text{ см}$, три размером $1\text{ см} \times 1\text{ см} \times 2\text{ см}$ и шесть размером $1\text{ см} \times 1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Он хочет сделать большую кубовидную призму, используя некоторые из них. Какова максимально возможная площадь поверхности (см^2) новой кубовидной призмы?

Решение: Сумма объемов всех 10 кубовидных призм равна $8 + 3 \times 2 + 6 \times 1 = 20\text{ см}^3$. Если мы используем кубовидную призму $2\text{ см} \times 2\text{ см} \times 2\text{ см}$, то наименьшее основание новой кубовидной призмы равно $2\text{ см} \times 2\text{ см}$,

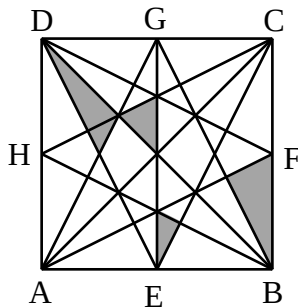
следовательно, ее высота не превышает 5 см. Следовательно, максимально возможная площадь поверхности не превышает

$$(2 \times 2) \times 2 + (2 \times 5) \times 4 = 48 \text{ см}^2.$$

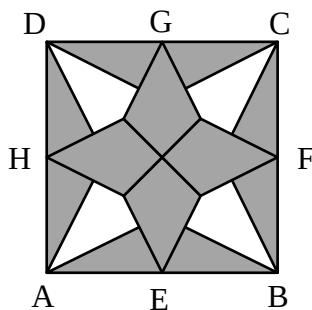
Если мы не используем кубовидную призму $2 \text{ см} \times 2 \text{ см} \times 2 \text{ см}$, то мы можем соединить все остальные кубовидные призмы, используя наименьшую поверхность в качестве общей грани $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Мы можем поместить в очередь шесть кубов размера $1 \times 1 \times 1$ и три кубовидные призмы размера $1 \times 1 \times 2$, чтобы сформировать новый размер кубовидной призмы $1 \times 1 \times 12$. Следовательно, максимально возможная площадь поверхности этого нового кубоида равна $(1 \times 1) \times 2 + (1 \times 12) \times 4 = 50 \text{ см}^2$.

Ответ: 50 см^2 .

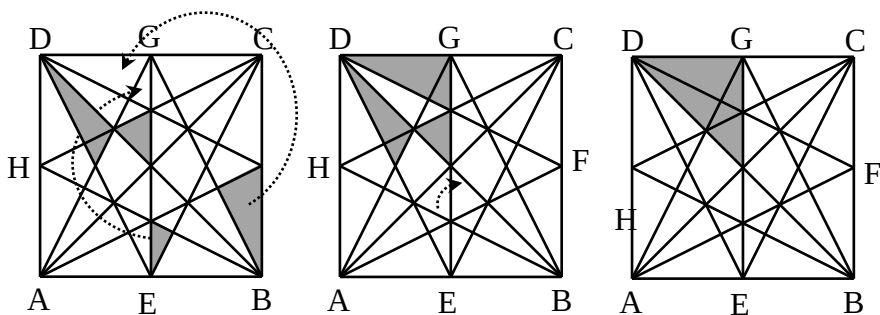
53. Нарисован квадрат ABCD, где E, F, G и H середины каждой из сторон. Чему равна площадь квадрата ABCD, если общая площадь заштрихованной области равна 15 см^2 ?



Решение: Как показано ниже, мы видим, что квадрат ABCD состоит из двух типов четырехугольников в форме воздушного змея — одного с заштрихованными областями, а другого с незаштрихованными областями.

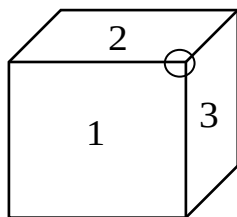


Если посчитать оба типа этих четырехугольников, то квадрат будет иметь общую площадь, в восемь раз превышающую общую площадь заштрихованных областей, равную 120 см^2 .

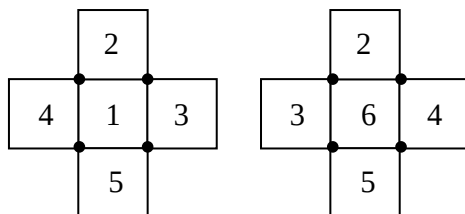


Ответ: 120 см^2

54. На гранях куба записаны числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 так, что сумма чисел на каждой паре противоположных граней равна 7. Для каждого из восьми углов куба мы умножаем три числа на трех гранях, противолежащих этому углу, и запишем его значение. (На рисунке значение указанного угла равно $1 \times 2 \times 3 = 6$) Чему равна сумма восьми значений, присвоенных углам куба?



Решение: На рисунке ниже слева показаны углы и грани, соприкасающиеся со стороной с номером 1, а справа показана противоположная сторона кубика с номером 6, которая идентична остальным четырем углам.



Мы вычисляем восемь чисел по отдельности и затем суммируем их. Восемь троек целых чисел в восьми углах равны (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 4, 5), (1, 3, 5), (6, 2, 3), (6, 2, 4), (6, 3, 5) и (6, 4, 5).

Восемь значений следующие:

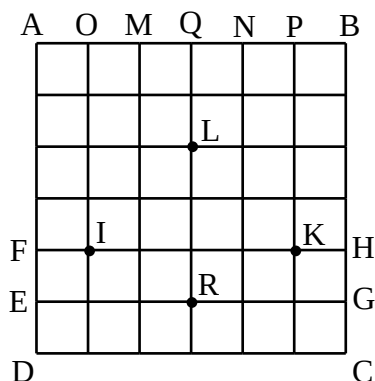
$$\begin{aligned}
 1 \times 2 \times 3 &= 6, 1 \times 2 \times 4 = 8, \\
 1 \times 3 \times 5 &= 15, 1 \times 4 \times 5 = 20, \\
 2 \times 3 \times 6 &= 36, 2 \times 4 \times 6 = 48, \\
 3 \times 5 \times 6 &= 90, 4 \times 5 \times 6 = 120.
 \end{aligned}$$

Сумма этих восьми положительных целых чисел равна:

$$6 + 8 + 15 + 20 + 36 + 48 + 90 + 120 = 343.$$

Ответ: 343.

55. Мр. Ноби использовал квадратную бумагу в клетку ABCD, как показано на схеме, чтобы сложить конверт.



Затем он сложил бумагу по следующей схеме:

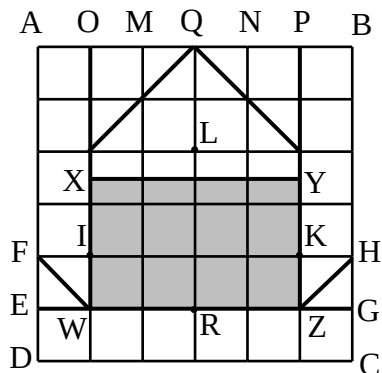
- 1) Сложить D к F;
- 2) Сложить E к I и G к K;
- 3) Сложить A к M и B к N;
- 4) Сложить O к L и P к L;
- 5) Сложить Q к R.

Учитывая, что $AB = 12$ см, какова площадь полученного им конверта в см^2 ?

Нарисуйте конверт, который он получил.

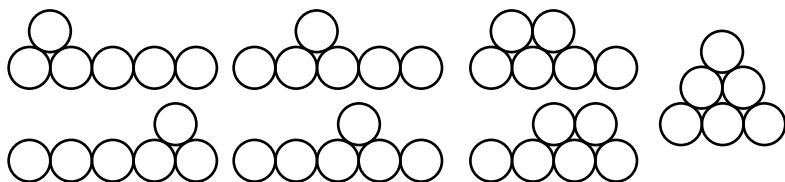
Решение: Обратите внимание, если мы согнем точку Q к точке R, то бумага будет сложена по биссектрисе отрезка QR.

Таким образом, конечный конверт имеет форму прямоугольника XYZW ниже. Тогда площадь конверта равна $8 \times 5 = 40 \text{ см}^2$.



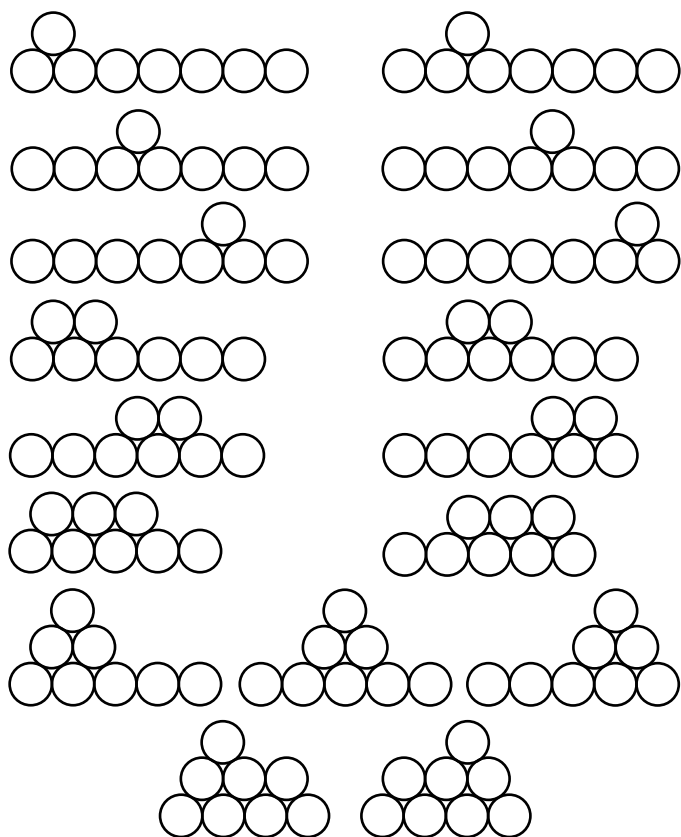
Ответ: 40 см^2 .

56. Рассмотрим расположение n одинаковых окружностей, без наложения друг на друга, таких, чтобы было не менее двух рядов окружностей. Каждый круг должен касаться следующего в том же ряду, и каждый круг, кроме тех, что находятся в нижнем ряду, должен касаться двух кругов в ряду под ним. Например, существует 7 возможных вариантов расположения для $n = 6$, как показано на диаграмме ниже.



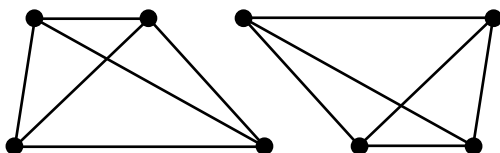
Нарисуйте все возможные варианты расположения кругов для $n = 8$.

Решение:



57. В одной провинции есть двенадцать дорог, каждая из которых соединяет пару городов. Каждый город расположен на пересечении трех шоссе. Каково число городов в этой провинции?

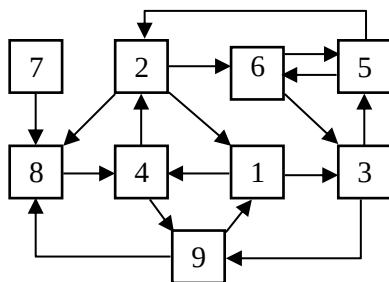
Решение: Так как магистралей 12, то есть и $12 \times 2 = 24$ точки окончания. Поскольку на каждый город приходится по 3 из них, число городов равно $24 \div 3 = 8$. Следующая диаграмма является примером:



Ответ: 8 городов.

58. Энди записывает целое положительное число, используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 ровно один раз. Любая последовательность двух соседних цифр в нем образует целое число, которое делится либо на 7, либо на 13. Запишите все возможные последовательности чисел, образованные Энди, удовлетворяющие условиям.

Решение: Единственные кратные 7 с двумя разными ненулевыми цифрами: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 84, 91 и 98, а единственные числа, кратные 13, состоящие из двух разных ненулевых цифр следующие: 13, 26, 39, 52, 65, 78 и 91. На диаграмме ниже показаны все возможные отношения смежности. Единственный путь, который проходит по всем цифрам, дает число 784913526.



Ответ: 784913526.

59. Ферма размером 112 на 75 метров разделена на 13 квадратных полей, как показано на схеме ниже. Поле в правом нижнем углу имеет длину стороны 33 метра.

62. Анна спрашивает своего учителя, сколько ему лет. Он отвечает: «Мой возраст сейчас — квадратное число, но после моего дня рождения он станет простым числом». Если его возраст больше 20, но меньше 65, сколько ему сейчас лет?

Решение: Единственными квадратными числами, которые больше 20 и меньше 65, являются следующие: 25, 36, 49 и 64. Но из четырех чисел только $36 + 1 = 37$ простое число, следовательно, учителю сейчас 36 лет.

Ответ: 36 лет.

63. Произведение двух целых положительных чисел равно 1000000. Ни одно из этих двух чисел не содержит цифру 0. Какова их сумма?

Решение: Пусть $ab = 1000000 = 10^6 = 2^6 \times 5^6$.

Поскольку ни в a , ни в b нет цифры 0, одно из них делится только на 2, а другое — только на 5. Следовательно, $a = 5^6 = 15625$ и $b = 2^6 = 64$ или наоборот. В любом случае их сумма равна 15689.

Ответ: 15689.

64. У Дженни есть машина, которая может выполнять одно из следующих двух действий на каждом шаге: возведение числа в квадрат или умножение числа на 2. Начиная с цифры 1 через сколько шагов Дженни может получить 22019?

Решение: Начиная с 2^0 , нам нужно получить 2^{2019} . При каждом выполнении мы можем либо удвоить показатель степени, либо увеличить показатель степени (на 1).

Минимальное количество шагов для получения 2^{2019} — 18.

Один из способов найти это число — спуститься с 2019 к 0: уменьшить на 1, если текущее число нечетное, и разделить на 2, если оно четное. Полученная последовательность показателей степени: 2019, 2018, 1009, 1008, 504, 252, 126, 63, 62, 31, 30, 15, 14, 7, 6, 3, 2, 1, 0, что соответствует следующему разложению 2019:

$$2019 = (((((((0 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 1) \times 2 + 1$$

для чего нужно 18 шагов.

Ответ: 18.

65. Найдите все возможные целые положительные упорядоченные тройки (m, n, p) , чтобы $m^2 + n^2 = p^2$, где p - простое число, $p^2 < 200$ и $m < n$.

Решение: Так как p - простое число и $p^2 < 200$, то возможные значения для p - 2, 3, 5, 7, 11, 13. Поскольку $m < n$, единственными возможными целыми положительными значениями для $m^2 + n^2 = p^2$ являются $3^2 + 4^2 = 5^2$ и $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Следовательно, единственными упорядоченными тройками (m, n, p) являются $(3, 4, 5)$ и $(5, 12, 13)$.

Ответ: $(3, 4, 5)$ и $(5, 12, 13)$.

66. Найдите все положительные целые числа $n! + 2019$, которые являются точным квадратом (где $n!$ обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n).

Решение: Пусть n — такое число.

Для $n = 1, 2$ имеем $n! + 2019 = 2020, 2021$ соответственно, которые не являются полными квадратами. Для $n = 3$ имеем $n! + 2019 = 2025 = 45^2$.

Для $n \geq 4$ ясно, что $n!$ делится на 4. $n! + 2019$ дает остаток 3 при делении на 4 и, следовательно $n! + 2019$, не может быть идеальным квадратом.

В заключение, имеем единственное решение $n = 3$.

Ответ: 3.

67. Первые четыре цифры восьмизначного совершенного квадрата равны 2012. Найдите его квадратный корень.

Решение: Обратите внимание, что $4485^2 = 20115225 < 2012000$, $4486^2 = 20124196$ и $4487^2 = 20133169 > 20129999$. Отсюда мы видим, что существует только один идеальный квадрат, который лежит между 20120000 и 20129999, то есть 20124196. Следовательно, квадратный корень из числа равен 4486.

Ответ: 4486.

68. Какая последняя цифра у данного выражения

$$12^{2018} + 14^{2018} + 16^{2018} + 18^{2018} + 20^{2018} + \dots + \\ + 2014^{2018} + 2016^{2018} + 2018^{2018}?$$

Решение: Обратите внимание, что образец последней цифры должен повторяться каждые пять членов, и мы также имеем:

Последняя цифра степени двойки повторяется каждые 4 числа: 2, 4, 8 и 6.

Последняя цифра степени 4 повторяется каждые 2 числа: 4 и 6.

Последняя цифра степени числа 6 всегда равна 6.

Последняя цифра степени 8 повторяется каждые 4 числа: 8, 4, 2 и 6.

Последняя цифра степени 0 всегда равна 0.

Поскольку 2018 четное число и имеет остаток 2 при делении на 4, последняя цифра $12^{2018} + 14^{2018} + 16^{2018} + 18^{2018} + 20^{2018}$ совпадает с последней цифрой $4 + 6 + 6 + 4 + 0$, которая равна 0.

Поскольку в выражении 1004 члена, наша последняя цифра $12^{2018} + 14^{2018} + 16^{2018} + 18^{2018} + 20^{2018} + \dots + 2012^{2018} + 2014^{2018} + 2016^{2018} + 2018^{2018}$ равна последней цифре $2012^{2018} + 2014^{2018} + 2016^{2018} + 2018^{2018}$, то есть $4 + 6 + 6 + 4 = 20$.

Таким образом, ответ 0.

Ответ: 0.

72. Найдите наименьшее число, кратное 9, которое не делится на сумму его цифр.

Решение: Рассмотрим

$$\begin{aligned} 9 &= 9 \times 1, 18 = (1 + 8) \times 2, 27 = (2 + 7) \times 3, \\ 36 &= (3 + 6) \times 4, 45 = (4 + 5) \times 5, 54 = (5 + 4) \times 6, \\ 63 &= (6 + 3) \times 7, 72 = (7 + 2) \times 8, 81 = (8 + 1) \times 9, \\ 90 &= (9 + 0) \times 10, 99 = (9 + 9) \times 5 + 9. \end{aligned}$$

Следовательно, это число 99.

Ответ: 99.

73. Двухзначное нечетное число кратно 9. Произведение его цифр также кратно 9. Какое это число?

Решение: Нам просто нужно рассмотреть следующие пять двухзначных нечетных чисел, а именно: 27, 45, 63, 81 и 99. При проверке, числа с искомыми свойствами будут равны 63 или 99.

Ответ: 63 или 99.

74. В многозначном положительном целом числе, кратном 7, каждая цифра, кроме цифры единицы, равна 6. Перечислите все возможные значения его цифр в разряде единиц.

Решение: Для двузначных чисел (с использованием одной 6) – существует только одно число, кратное 7, которое удовлетворяет условию, и это 63.

Для трехзначных чисел (с использованием двух шестерок) существует только одно число, кратное 7, которое удовлетворяет условию $66 - x \times 2$. А это возможно при $x = 5$, значит число равно 665.

Для четырехзначных чисел (с использованием трех шестерок) существует только одно число, кратное 7, которое находится по условию $666 - x \times 2$, и это 6664.

Для пятизначных чисел (с использованием четырех шестерок) – есть два числа, кратных 7, которые удовлетворяют условию, а именно 66661 и 66668.

Для шестизначных чисел (с использованием пяти шестерок) существует только одно число, кратное 7, которое удовлетворяет условию, и это 666666.

Для семизначных чисел (с использованием шести шестерок) — есть два числа, кратных 7, которые удовлетворяют условию, а именно 6666660 и 6666667.

И если мы используем более шести шестерок, мы просто повторим этот цикл, поскольку 666666 кратно 7. Следовательно, цифры единиц — это все возможные цифры, кроме 2 и 9.

Ответ: 0, 1, 3, 4, 5, 7 и 8.

75. Сколько существует целых натуральных чисел меньше 2014, сумма цифр которых кратна 5?

Решение: Для однозначных чисел есть только одно число, которое удовлетворяет условиям, — это 5.

Для чисел от 10 до 2009 мы можем сгруппировать числа в группы по 10 так, чтобы числа в каждой группе отличались только от 1 до 9 (например, 10-19, 20-29 и так далее до 2000-2009). Отсюда легко увидеть, что всего существует 200 групп и в каждой группе ровно 2 числа будут иметь цифровую сумму, кратную 5.

Теперь остались числа 2010, 2011, 2012, 2013, и обратите внимание, что только 2012 имеет желаемое свойство.

Таким образом, общее количество целых положительных чисел меньше 2014 с искомым свойством равно

$$1 + 2 \times 200 + 1 = 402.$$

Ответ: 402.

76. Какова сумма всех кратных 6 чисел, каждое из которых имеет ровно десять положительных делителей?

Решение: Обратите внимание, что $6 = 2 \times 3$, поэтому каждое число, кратное 6, имеет как минимум два разных простых делителя. Теперь заметьте, что $10 = 2 \times 5$, поэтому одно из простых чисел необходимо возвести в $2 - 1 = 1$ -ю степень, а другое в $5 - 1 = 4$ -ю степень. Следовательно, у нас есть два числа, которые удовлетворяют условиям: $2 \times 3^4 = 162$ и $2^4 \times 3 = 48$, и наша желаемая сумма будет равна $162 + 48 = 210$.

Ответ: 210.

77. Каково наименьшее целое положительное число, при делении которого на 5, 7 и 9 получается остаток 3, 4 и 5 соответственно?

Решение: Если дважды это число разделить на 5, 7 или 9, остаток во всех случаях будет равен 1 (например, при делении на 5 дважды, будет остаток равный $3 + 3 = 6$, который дает остаток 1 при делении на 5).

Следовательно, минимальное значение удвоенного числа равно $5 \times 7 \times 9 + 1 = 316$. Следовательно, наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее условию, равно $316 \div 2 = 158$.

Ответ: 158.

78. Чему равен остаток от деления $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 14 \times 15$ на $1 + 2 + 3 + \dots + 14 + 15$?

Решение:

У нас есть $1 + 2 + 3 + \dots + 14 + 15 = 120 = 3 \times 5 \times 8$. Поскольку каждое из 3, 5 и 8 появляется в $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 14 \times 15$, следовательно, остаток равен 0.

Ответ: остаток равен 0.

79. Известно, что $\overline{240a84} \times 243 = \overline{56b90256}$. Оцени значение $a + b$?

Решение: Поскольку 234 делится на 9, отсюда следует, что $\overline{56b90256}$ также делится на 9. По признаку делимости на 9 сумма цифр данного числа $5 + 6 + b + 9 + 0 + 2 + 5 + 6 = b + 33$ должна делиться на 9. Обратите внимание, что значение цифры b не превышает 9, поэтому b должно быть равным 3. Таким образом, $\overline{240a84} = \overline{56390256} \div 243 = 240984$, следовательно, $a = 9$.

Итак, значение $a + b = 9 + 3 = 12$.

Ответ: 12.

80. Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 ровно один раз, найдите наименьшее девятизначное число, которое делится на 99.

Решение: Пусть образовавшееся число имеет вид $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ и a_9 перестановка цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Так как

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ делится на 9, то делится на 9 число $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$. Чтобы делиться на 99, следующая разность должна делиться на 11:

$$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) - (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) = 45 - 2(a_2 + a_4 + a_6 + a_8).$$

Чтобы указанная выше разность делилась на 11, сумма $(a_2 + a_4 + a_6 + a_8)$ при делении на 11 должна давать остаток 6.

Так как $10 \leq a_2 + a_4 + a_6 + a_8 \leq 30$, то возможно два случая: либо сумма равна 17, либо 28.

(а) Рассмотрим случай $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 28$, тогда $a_2, a_4, a_6, a_8 \geq 4$.

Чтобы число было как можно меньшим, пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ и наименьшее возможное число равно 142738596.

(б) Рассмотрим $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 17$.

Чтобы число было как можно меньшим, пусть $a_1 = 1$. Тогда (a_2, a_4, a_6, a_8) является перестановкой (2, 3, 4, 8) или (2, 4, 5, 6). Таким образом, наименьшее возможное число в данном случае — 123475869.

Из (а) и (б) наименьшее число, которое можно составить, 123475869.

Ответ: 123475869.

81. Пусть a, b и c — разные цифры. Произведение трехзначных чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ представляет собой девятизначное число, первая цифра которого равна 2, а последняя цифра — 9. Найдите это произведение.

Решение: Поскольку произведение нечетное, отсюда следует, что $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ все нечетны, а это означает, что каждое из a , b и c нечетно.

Поскольку, $1000 \times 1000 \times \overline{cab} > \overline{abc} \times \overline{bca} \times \overline{cab} = 2^{***} \dots 9$, следовательно $c \geq 3$. Обратите внимание, что $c \neq 5$, в противном случае цифра единиц $\overline{abc} \times \overline{bca} \times \overline{cab}$ должна быть 5. Аналогично мы имеем $a \geq 3$, $b \geq 3$ и $a \neq 5$, $b \neq 5$. Поскольку цифра единиц числа $\overline{abc} \times \overline{bca} \times \overline{cab}$ равна 9 и все a , b и c различны, единственным возможным решением для (a, b, c) является $(9, 7, 3)$. Следовательно, имеем следующие решения: $973 \times 739 \times 397 = 285461659$ или $937 \times 379 \times 793 = 281612539$.

Ответ: 285461659, 281612539.

82. Дана последовательность 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, ..., где n -й член после 3-го является суммой трех предыдущих членов. Например, 4-й член равен $1 + 1 + 1 = 3$, а 5-й член равен $1 + 1 + 3 = 5$. Какой остаток получается при делении 2018-го члена на 8?

Решение: Обратите внимание на таблицу ниже:

п-й порядок	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Число	1	1	1	3	5	9	17	31	57	105	193	...
Остаток от деления на 8	1	1	1	3	5	1	1	7	1	1	1	...

Поскольку остаток каждого слагаемого после третьего слагаемого при делении на 8 является остатком суммы трех предыдущих остатков при делении на 8, мы знаем, что остаток повторяется каждые 8 слагаемых из таблицы.

Поскольку 2018 год имеет остаток 2 при делении на 8, остаток 2018-го семестра при делении на 8 равен остатку 2-го семестра при делении на 8, что равно 1.

Ответ: 1.

83. 2014 - значное число — это наименьшее целое положительное число, такое, что при умножении его на 3 каждая цифра произведения становится четной. Сколько раз в исходном числе встречается цифра 3?

Решение: Если исходное число минимально, то его произведение также минимально. Старшая цифра произведения должна быть четной и не менее 3. Чтобы минимизировать значение этого числа, мы принимаем ведущую цифру за 4. Мы можем продолжить число, имея 2012 копий 0. Поскольку произведение является кратным 3, его цифровая сумма должна делиться на 3. Следовательно, минимальное значение его последней цифры равно 2. Получаем, $4000 \dots 002 \div 3 = 1333 \dots 334$. Следовательно, цифра 3 встречается в исходном номере 2012 раз.

Ответ: 2012 раз.

84. Сколько будет натуральных чисел в промежутке от 1 до 2015, которые не делятся ни на одно из следующих чисел: 2, 20, 201 и 2015?

Решение: Это эквивалентно вопросу, сколько положительных целых чисел от 1 до 2014 не делится на 2 или 201.

Есть $2014 \div 2 = 1007$ числа, делящиеся на 2.

Есть 10 чисел $2014 = 201 \times 10 + 4$, делящиеся на 201.

Есть 5 чисел $2014 = 402 \times 5 + 4$, делящихся на 402

Следовательно, $2014 - 1007 - 10 + 5 = 1002$ чисел.

Ответ: 1002.

85. Рассмотрим следующие числа $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, 29 \times 30$. Сколько из них делятся на 3 или 5?

Решение: Из следующей таблицы найдем числа, которые делятся на 3 или 5.

Числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Делятся на 3			V			V			V			V			V
Делятся на 5					V					V					V
Числа	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Делятся на 3			V			V			V			V			V
Делятся на 5					V					V					V

Итак, из чисел $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, 29 \times 30$ те, которые не делятся на 3 и 5, — это два соседних числа, оба из которых не могут делиться на 3 или 5, а именно: $1 \times 2, 7 \times 8, 13 \times 14, 16 \times 17, 22 \times 23, 28 \times 29$. Следовательно, существуют $29 - 6 = 23$ числа, которые делятся на 3 или 5.

Ответы: 23.

86. Число $\overline{abcab}$ кратно 7, $\overline{abc}$ кратно 9 и $\overline{cba}$ кратно 4. Найдите наименьшее возможное значение $a \times b \times c$.

Решение: Заметим следующее, $\overline{ab0ab} = \overline{ab} \times 1001 = 7 \times 143 \times \overline{ab}$ кратно 7, значит c также должно быть кратно 7. Это возможно при $c = 7$, а $c = 0$ — не допускается. Поскольку число $\overline{ab7}$ кратно 9, $a + b = 2$ или 11, и $\overline{7ba}$ кратно 4, то число a четное. Следовательно, (a, b) — это $(2, 0), (2, 9), (4, 7), (6, 5)$ или $(8, 3)$.

Поскольку $\overline{7ba}$ кратно 4, $\overline{ba}$ должно быть кратно 4, только (a, b) , равные $(2, 9)$ или $(6, 5)$, удовлетворяют этому случаю. Тогда возможны следующие варианты:

$$a \times b \times c = 2 \times 9 \times 7 = 126 \text{ или}$$

$a \times b \times c = 6 \times 5 \times 7 = 210$. Следовательно, наименьшее возможное значение равно 126.

Ответ: 126.

87. Пусть A , B , C и D — четыре различных натуральных числа, такие, что сумма любых двух делится на 2, а сумма любых трёх делится на 3. Каково минимальное значение суммы $A + B + C + D$?

Решение: Четыре числа должны иметь одинаковый остаток при делении на 2, а также должны иметь одинаковый остаток при делении на 3. Чтобы минимизировать их сумму, каждый из этих двух остатков должен быть принят равным 1. Следовательно, минимальное значение этих чисел равно 1, 7, 13 и 19, а их сумма равна $1+7+13+19 = 40$.

Ответ: 40.

88. Сегодня собрание трёх комитетов. Один из них собирается каждые 11 дней, второй — каждые 15 дней, а третий — каждый 21 день. Сколько дней пройдет с сегодняшнего дня, пока они все не встретятся опять в один день?

Решение: Дни, считая с сегодняшнего дня, должны быть кратны 11, 15 и 21. Поскольку наименьшее общее кратное 11, 15 и 21 равно $11 \times 3 \times 5 \times 7 = 1155$, следовательно, осталось 1155 дней, пока они все снова не встретятся в один и тот же день.

Ответ: 1155 дней.

89. Когда мой возраст делится на 2, 3, 4 или 6, всегда остается остаток 1, но, когда он делится на 7, остатка нет. Сколько мне лет, если мой возраст меньше 100?

Решение: Если мой возраст разделить на 7, остатка не останется, поэтому мой возраст должен быть кратен 7.

Теперь мы проверяем все возрасты, кратные 7:

- Если мне 7 лет и при делении на 4 остаток равен 3; это не удовлетворяет нашим условиям.

- Если мне 14 лет и когда он делится на 2; это не удовлетворяет нашим условиям.
- Если мне 21 год и если его разделить на 3; это не удовлетворяет нашим условиям.
- Если мой возраст 28 лет, и когда он делится на 2; это не удовлетворяет нашим условиям.
- Если мне 35 лет и при делении на 4 остаток равен 3; это не удовлетворяет нашим условиям.
- Если мне 42 года и если его разделить на 2; это не удовлетворяет нашим условиям.
- Если мне 49 лет и при делении его на 2, 3, 4 или 6 всегда остается остаток 1.

Следующее число, которое будет удовлетворять нашим условиям, — это 49 плюс наименьшее общее кратное 2, 3, 4, 6 и 7, то есть $49 + 84 = 133$, которое уже больше 100. Значит, мой возраст — 49.

Ответ: 49.

90. Санни получил от отца три коробки, в которых было некоторое количество шариков. Его отец сказал, что количество шариков в первой, второй и третьей коробках — это три последовательных целых числа в порядке возрастания, которые делятся на 5, 7 и 9 соответственно. Каково минимальное общее количество шариков в трех коробках?

Решение: Пусть n , $n + 1$ и $n + 2$ — три последовательных положительных целых числа, обозначающих количество шариков внутри коробок. На основании предоставленной информации мы также знаем, что $2n$, $2(n + 1)$ и $2(n + 2)$ или $2n$, $2n + 2$ и $2n + 4$ делятся на 5, 7 и 9 соответственно. Отсюда следует, что $2n - 5$ делится на 5, $2n + 2 - 7 = 2n - 5$ делится на 7 и $2n + 4 - 9 = 2n - 5$ делится на 9. Это означает, что $2n - 5$ это наименьшее общее кратное 5, 7 и 9. Поскольку мы знаем, что наименьшее общее кратное

5, 7 и 9 равно $5 \times 7 \times 9 = 315$, то мы имеем $2n - 5 = 315$, т.е. $n = 160$.

Таким образом, минимально возможное количество шариков внутри 1-го, 2-го и 3-го ящиков равно 160, 161 и 162 соответственно, а их сумма равна $160 + 161 + 162 = 483$.

Ответ: 483.

91. Целое положительное число n делится на четыре из множества чисел 2, 3, 4, 5, 6 и 7, но не делится на два других. Если два числа, которые не делятся на n - последовательные, то каково наименьшее значение n ?

Решение: Если n не делится на 2, то оно также не делится на 4 или 6. Следовательно, оно должно делиться на 2. Если n не делится на 3, то оно также не делится на 6. Поскольку два числа, не делящие n последовательные, следовательно, оно должно делиться на 3. Теперь, поскольку 2 и 3 не имеют общих делителей больше 1, следовательно, n делится на $2 \times 3 = 6$. Поскольку два числа, не делящие n , являются последовательными, они должны быть 4 и 5, поэтому n должно делиться на 7. Наименьшее общее кратное 2, 3, 6 и 7 равно 42, и оно действительно не делится ни на 4, ни на 5.

Ответ: 42.

92. По кругу расположены 100 тарелок. Сьюзен, обходя круг, кладет конфету на каждую 15-ю тарелку. Если она будет продолжать это делать до тех пор, пока конфеты не перестанут попадать на пустую тарелку, сколько тарелок останется пустыми?

Решение: Мы пронумеровали тарелки 1, 2, 3, ..., 99, 100 и положили первую конфету на тарелку 1. Поскольку наибольший общий делитель 100 и 15 равен 5, Сьюзен кладет конфету на все тарелки, остаток которых равен 1,

при делении на 5, то есть 1, 6, 11, ... , 91 и 96, на этих двадцати тарелках есть конфеты, следовательно, $100 - 20 = 80$ тарелок остаются пустыми.

Ответ: 80 тарелок.

93. Если из трехзначного числа x вычесть 7, то результат будет кратен 7. Если из x вычесть 8, то результат будет кратным 8. Если из x вычесть 9, то результат будет кратен 9. Когда x делится на 10, какой остаток получается?

Решение: Поскольку $x - 7$ число кратно 7, то и x кратно 7. Точно так же x кратно 8 и 9. Теперь мы видим, что наименьшее общее кратное 7, 8 и 9 равно $7 \times 8 \times 9 = 504$, а следующее общее кратное – $504 \times 2 = 1008$, которое уже является четырехзначным числом. Поскольку x — трехзначное число, то оно должно принимать значение 504. При делении на 10 остается остаток 4.

Ответ: 4.

97. Сумма чисел А, В и С равна 390. Учитывая, что А в 3 раза больше В, и А составляет одну треть С, найдите значение С.

Решение: Пусть значение С равно x . Судя по предоставленной информации, мы имеем, что А равно $\frac{x}{3}$, а В равно $\frac{x}{9}$, тогда сумма трех чисел равна $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} = 390$. Данное уравнение дает решение $x = 270$, значит $C = 270$.

Ответ: 270.

98. Два года назад Стиву было в три раза больше лет, чем Биллу, а через три года он будет вдвое старше Билла. Найдите сумму их возрастов сейчас.

Решение: Пусть возраст Стива и Билла равен x и y соответственно. Тогда $x - 2 = 3(y - 2)$ и $x + 3 = 2(y + 3)$. Вычитая первое уравнение из второго, имеем $5 = -y + 12$ или $y = 7$. Отсюда следует, что $x = 17$ и сумма их возрастов равна $7 + 17 = 24$.

Ответ: 24.

99. Компания «Коко» имеет несколько действующих автомобилей. Налог на первый автомобиль составляет \$2000, налог на второй автомобиль на 5% больше, чем налог на первый автомобиль, налог на третий автомобиль на 10% больше, чем налог на первый автомобиль, а налог на остальные автомобили на 15% больше, чем налог на первый автомобиль. Если компания платит налог в размере \$15500 за все свои автомобили. Сколько автомобилей имеет компания?

Решение: Налог на первую машину составляет 2000 долларов.

Налог на вторую машину составляет:

$$2000 \times (1 + 5\%) = 2100 \text{ долларов.}$$

Налог на третью машину составляет:

$$2000 \times (1 + 10\%) = 2200 \text{ долларов.}$$

Налог на остальные автомобили составляет:

$$2000 \times (1 + 15\%) = 2300 \text{ долларов.}$$

Поскольку компания платит в общей сложности 15500 долларов США налога за все автомобили, общая сумма, которая тратится на остальные автомобили равна:

$$15500 - 2000 - 2100 - 2200 = 9200 \text{ долларов.}$$

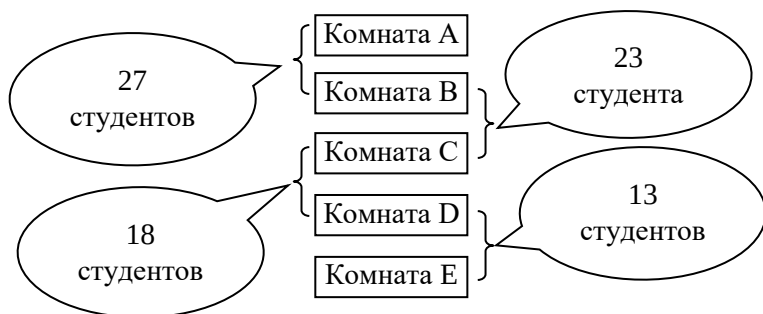
Таким образом, компания имеет общее количество

$$\frac{9200}{2300} + 3 = 7$$

автомобилей.

Ответ: 7.

100. В летнем лагере было 50 студентов и их распределили по пяти комнатам. Детали указаны на схеме ниже:



Сколько студентов было в каждой комнате?

Решение: В комнатах от А до D - $27 + 18 = 45$ студентов.

Следовательно, в комнате E - $50 - 45 = 5$ студентов.

В классах D и E учатся 13 студентов. Следовательно, в комнате D: $13 - 5 = 8$ студентов.

В комнатах C и D учатся 18 студентов. Следовательно, в комнате C: $18 - 8 = 10$ студентов.

В комнатах B и C учатся 23 ученика. Следовательно, в комнате B: $23 - 10 = 13$ учеников.

В комнатах A и B учатся 27 студентов. Следовательно, в комнате A: $27 - 13 = 14$ студентов.

Ответ: 14 студентов в комнате A, 13 студентов в комнате B, 10 студентов в комнате C, 8 студентов в комнате D, 5 студентов в классе E.

101. Пусть $\square$ и $\triangle$ - два различных положительных целых числа, таких что $\square - \triangle = 2013$ и $\frac{\square}{\triangle} = \frac{\square - \triangle - 669}{\square - \triangle - 2011}$. Каково значение $\square$?

Решение: Так как, $\square - \triangle = 2013$, тогда

$$\frac{\square}{\Delta} = \frac{2013 - 669}{2013 - 2011} = \frac{1344}{2} = 672$$

Следовательно, $\square = 672\Delta$, тогда

$$\square - \Delta = 672\Delta - \Delta = 671\Delta = 2013.$$

Значит, $\Delta = \frac{2013}{671} = 3$, а $\square = 2016$.

Ответ: 2016.

102. Участник А предлагает интернет-услугу с первоначальным платежом в размере 300000 рупий и ежемесячной платой в размере 72000 рупий, в то время как Компания В предлагает ту же интернет-услугу без первоначального платежа, но имеет ежемесячную плату в размере 90000 рупий. Если Джонни предпочитает компанию А, на какое минимальное количество месяцев ему следует подписаться на компанию А, чтобы он платил меньше, чем за подписку на компанию В?

Решение: Ежемесячная плата для компании А на 90000 - 72000 = 18000 рупий ниже, чем для компании В. Таким образом, первоначальный платеж может быть возмещен через $300000 \div 18000 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$, следовательно, минимальное количество месяцев, в течение которых он должен подписаться на компанию А, чтобы он заплатил меньше, чем подписка на компанию В, составляет 17 месяцев.

Ответ: 17.

103. Группа студентов отправилась на экскурсию на автобусе. В каждом автобусе одинаковое количество студентов и все места были заняты. Но по дороге один автобус сломался. Затем студентов равномерно распределили по оставшимся автобусам и в каждом автобусе должны были стоять по 4 студента. По дороге домой сломались еще два автобуса,

поэтому поездку закончили с 18 студентами в каждом автобусе. Сколько студентов было в этой поездке?

Решение: Пусть количество автобусов равно x , а количество студентов в автобусе равно y . Когда один автобус сломается, студенты, находившиеся в этом автобусе, будут распределены по остальным автобусам, следовательно, имеем $y = 4(x - 1)$. Когда три автобуса сломаются, студенты в этих трех автобусах распределятся по остальным автобусам, следовательно, мы имеем

$3y = 18(x - 3)$, то есть $y = 6(x - 3)$. Тогда мы можем получить $4(x - 1) = 6(x - 3)$, так что $x = 7, y = 24$.

Таким образом, общее количество студентов составляет

$$24 \times 7 = 168.$$

Ответ: 168.

104. В магазине были проданы две разные рубашки по одной и той же цене. В то время как одна рубашка принесла прибыль в размере 30%, магазин понес убыток в размере 30% от продажи другой. Зафиксировал ли магазин прибыль или убыток от этих двух операций и на сколько процентов?

Решение: Предположим, каждая рубашка будет продана за $(100 + 30)(100 - 30) = 9100$ долларов.

Тогда первоначальная стоимость первой рубашки равна

$$9100 \div (100\% + 30\%) = 7000 \text{ долларам,}$$

а первоначальная стоимость второй рубашки равна

$$9100 \div (100\% - 30\%) = 13000 \text{ долларам.}$$

Общая стоимость обеих рубашек – 20000 долларов, а общая выручка магазина составляет $9100 \times 2 = 18200$ долларов.

Следовательно, чистый убыток составит

$$\frac{20000 - 18200}{20000} = \frac{1800}{20000} = \frac{9}{100} = 9\%$$

Ответ: убыток 9%.

105. Холли зарабатывает 67510 рупий в час, а Молли — 32490 рупий в час. Вместе они заработали в общей сложности 267510 рупий. Если бы Холли отработала столько же часов, сколько Молли, а Молли отработала столько же часов, сколько Холли, их совокупный заработок составил бы 232490 рупий. Сколько часов Холли и Молли работали индивидуально?

Решение: Сумма их почасовой оплаты составляет $67510 + 32490 = 100000$ рупий. Обратите внимание, что $267510 = 2 \times 100000 + 67510$, следовательно, Холли работала 3 часа, а Молли - 2 часа.

Проверяем обратное, если Холли работает 2 часа, Молли работает 3 часа, их совокупный заработок составит $2 \times 67510 + 3 \times 32490 = 2 \times 100000 + 32490 = 232490$, что соответствует условиям задачи.

Ответ: Холли работала 3 часа, Молли 2 часа.

106. У Алисы и Брайана есть по некоторому количеству коров. Алиса говорит Брайану: «Если я добавлю в три раза больше коров, чем у тебя есть, то я буду довольна». Брайан отвечает: «Если я добавлю к моей добыче в пять раз больше коров, чем у тебя, то я буду удовлетворен». Если количество коров, которое их удовлетворяет, одинаково, каково минимальное значение этого числа?

Решение: Количество коров, которые есть у Алисы, плюс трижды количество коров, которые есть у Брайана, равно количеству коров, которые есть у Брайана, плюс пятикратное количество коров, которые есть у Алисы. Отсюда следует, что двукратное количество коров у Брайана равно четырехкратному количеству коров у Алисы, а это означает, что у Брайана в два раза больше коров, чем у Алисы. Чтобы свести это к минимуму, мы

позволяем Алисе иметь 1 корову, а Брайану — 2 коровы. Тогда искомое число $1 + 3 \times 2 = 2 + 5 \times 1 = 7$.

Ответ: 7.

107. Разделите 108 учащихся на четыре группы так, чтобы число учащихся в первой группе в два раза превышало:

- половину числа учащихся второй группы;
- на 2 меньше числа учащихся в третьей группе;
- на 2 больше, чем количество учащихся в четвертой группе.

Найдите количество учеников в первой группе.

Решение: Если мы переместим двух учеников из третьей группы в четвертую, то в каждой из них будет вдвое больше учеников, чем в первой группе, а во второй группе — в четыре раза больше.

Следовательно, в первой группе есть $108 \div (1 + 4 + 2 + 2) = 12$ учеников.

Ответ: 12.

108. В трех контейнерах А, В и С содержится в общей сложности 48 яблок. Сначала из А берут 6 яблок и кладут в В. Затем, из В берут 9 яблок и кладут в С. Теперь в каждом контейнере одинаковое количество яблок. Какое первоначальное количество яблок было в контейнере А?

Решение: Поскольку всего яблок 48 и в каждом контейнере теперь одинаковое количество яблок, в каждом контейнере есть $48 \div 3 = 16$ яблок. Очевидно, в контейнере А было $16 + 6 = 22$ яблока.

Ответ: 22.

109. В комнате 23 ученика. Их возраст составляет 10, 11, 12 или 13 лет, и есть по крайней мере один ученик каждого возраста. Известно, что их общий возраст составляет 253 года, а 12-летних учеников в 1,5 раза больше, чем 13-летних. Сколько там 10-летних учеников?

Решение: Так как 12-летних в 1,5 раза больше, чем 13-летних, то число 13-летних учеников равно $2a$, число 12-летних — $3a$. Следовательно, общее число 12-летних и 13-летних школьников равно $5a$ ($a < 5$). Пусть b — количество учеников 11 лет. Значит

$$\begin{aligned} 253 &= 13 \times 2a + 12 \times 3a + 11 \times b + \\ &+ 10 \times (23 - 3a - 2a - b) = 230 + b + 12a \\ &\text{или } b + 12a = 23. \end{aligned}$$

Итак, у нас есть $a = 1$ и $b = 11$, значит число 10-летних школьников равно $23 - 11 - 5 = 7$.

Ответ: 7.

113. В четырехзначном числе цифра тысяч больше цифры единиц, которая не равна нулю, а цифра сотен больше цифры десятков. Новое четырехзначное число получается из исходного числа путем изменения порядка цифр. Сколько существует возможных отличий исходного и нового числа?

Решение: $\overline{abcd} - \overline{dcba} = (1000a + 100b + 10c + d) -$
 $-(1000d + 100c + 10b + a) = 999(a - d) + 90(b - c)$

Поскольку цифра тысяч больше, чем цифра единиц, a и d не могут быть равны 0, существует 8 различных значений $a - d$. Поскольку цифра сотен больше цифры десятков, существует 9 различных значений $b - c$. Следовательно, $\overline{abcd} - \overline{dcba}$ имеет 72 различных значения. Следовательно,

существует 72 возможных различий исходного и нового числа.

Ответ: 72 возможных различия.

114. Если $\overline{243a688} \div \overline{31b2} = 764$, найдите значение $a \times b$.

Решение: Если 2430688 разделить на 764 , то в остатке будет 404 . Следовательно, $\overline{a404}$ кратно 764 , и мы имеем $8404 = 11 \times 764$. Следовательно, $a = 8$. При делении 2438688 на 764 получается частное 3192 . Отсюда $b = 9$ и $a \times b = 72$.

Ответ: 72.

115. Три положительных двузначных числа и 63 расположены в таблице, где вычисляется произведение двух чисел в каждой строке или столбце. Если сложить все четыре произведения, получится 2016 год. Каково максимально возможное значение A ?

A	
	63

Решение: Пусть тремя положительными двузначными целыми числами будут a, b и c , как показано на рисунке.

a	b
c	63

Значит $ab + 63c + ac + 63b = 2016$ или

$$(a + 63)(b + c) = 2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7.$$

Поскольку $b + c \geq 20$, наименьшее возможное значение $b + c$ равно $7 \times 3 = 21$. Таким образом, максимально возможное значение $a + 63$ равно $2^5 \times 3 = 96$, то есть

наибольшее значение a равно $96 - 63 = 33$. Пример показан ниже:

33	11
10	63

Ответ: 33.

116. Всякий раз, когда Сэм читает такую дату, как 20/11/2016, он неправильно интерпретирует ее как два деления, причем второе оценивается первым перед первым. Например,
- $$20 \div (11 \div 2016) = \frac{40320}{11} = 3665 \frac{5}{11}$$

Для некоторых дат, как в примере выше, он не получает целочисленный результат, а для некоторых, например, 20/08/2016, он получает $20 \div (8 \div 2016) = 5040$, что является целым числом. Сколько дат в 2016 году (день/месяц/год) дадут ему нецелый ответ?

Решение: Дата $d/m/2016$ даст дробь, которая будет целым числом $d \div \frac{m}{2016} = \frac{2016d}{m}$, если $2016d$ кратно m . Поскольку, $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$, то все дни в месяцах 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 и 12 будут давать целочисленные значения, а в месяце 10 число d должно быть кратно 5. Во всех остальных месяцах, d должно быть кратно m . В итоге:

месяц m	целые дни d	количество целых дней
5	5, 10, 15, 20, 25, 30	6
10	5, 10, 15, 20, 25, 30	6
11	11, 22	2

В итоге, $(31 - 6) + (31 - 6) + (30 - 2) = 78$ дат дают ему нецелое число.

Ответ: 78 дат.

117. На диаграмме, показанной ниже, каждая пустая белая клетка заполнена целым числом от 1 до 9. Каждое число используется не более одного раза. Серая ячейка заполняется знаком $\times$, $\div$, $+$ или $-$. В каждой строке с 3 числами расчеты ведутся слева направо. В последнем столбце расчет идет сверху вниз. Покажите одно из возможных решений.

	-		=	
				$\times$
	$\div$		=	
				=
			=	

Решение: Обозначьте сетки, как показано на схеме.

Заметьте, что $c \neq 1$, $e \neq 1$, $f \neq 1$ и есть только 4 уравнения, которым удовлетворяют $d \div e = f$:

$8 \div 2 = 4$, $8 \div 4 = 2$, $6 \div 2 = 3$ и $6 \div 3 = 2$.

- Если $d \div e = f$ есть $8 \div 2 = 4$, то $j = 4c < 10$, т. е. $c = 1$.

Этот случай невозможен.

a	-	b	=	c
				$\times$
d	$\div$	e	=	f
				=
g	@	h	=	j

- Если $d \div e = f$ есть $8 \div 4 = 2$, то $j = 2c < 10$, т.е. $c = 3$ и, следовательно, $j = 6$.

a	$-$	b	$=$	3
				$\times$
8	$\div$	4	$=$	2
				$=$
g	@	h	$=$	6

Неиспользуемые числа: 1, 5, 7 и 9. Невозможно для уравнения $a - b = 3$.

- Если $d \div e = f$ есть $6 \div 2 = 3$, то $j = 3c < 10$, т.е. $c = 1$. Этот случай невозможен.

- Если $d \div e = f$ есть $6 \div 3 = 2$, то $j = 2c < 10$, т.е. $c = 4$ и, следовательно, $j = 8$.

a	$-$	b	$=$	4
				$\times$
6	$\div$	3	$=$	2
				$=$
g	@	h	$=$	8

Неиспользуемые числа: 1, 5, 7 и 9. Если $a - b = 4$, значит $5 - 1 = 4$, то есть $g@h = 8$ и $9@7 = 8$, невозможно. Следовательно, единственными возможными решениями для $a - b = 4$ являются $9 - 5 = 4$. Теперь возможные решения для $g@h = 8$, $7 + 1 = 8$ и $1 + 7 = 8$. Отсюда мы получаем два решения:

Следовательно, всего существует 2 возможных решения.

9	—	5	=	4
				×
6	÷	3	=	2
				=
7	+	1	=	8

9	—	5	=	4
				×
6	÷	3	=	2
				=
1	+	7	=	8

118. Известно, что $\overline{AMMM}$ и $\overline{MMMB}$ — два 4-значных числа, где А, В и М - разные цифры. Если $\frac{\overline{AMMM}}{\overline{MMMB}} = \frac{2}{5}$, то найдите значение $A + B + M$.

Решение: Мы знаем $\overline{AMMM} = 1000A + 111M$ и $\overline{MMMB} = 1110M + B$.

Поскольку $\frac{\overline{AMMM}}{\overline{MMMB}} = \frac{2}{5}$, $\overline{AMMM} = \frac{2}{5} \times \overline{MMMB} = 444M + 0,4B$, что эквивалентно $1000A + 111M = 444M + 0,4B$ или $333M + 0,4B = 1000A$. Обратите внимание, что $1000A$ является целым числом, поэтому $B = 0$ или 5. Если $B = 0$, то цифра единиц $333M$ равна 0, поскольку цифра единиц $1000A$ равна 0. Таким образом, $M = 0$, $\overline{MMMB} = 0$ это не является 4 - значным числом. Следовательно, $B = 5$ и $333M + 2 = 1000A$. Тогда цифра единиц $333M$ равна 8, поскольку цифра единиц $1000A$ равна 0. Таким образом, $M = 6$, значит $333M + 2 = 2000$. Так $A = 2$.

Следовательно, мы имеем $A + B + M = 2 + 5 + 6 = 13$.

Ответ: 13.

119. Найдите все возможные трехзначные числа $\overline{abc}$, чтобы $\overline{abc} = a! + b! + c!$ (Примечание: $n!$ (читается как n

факториал) означает $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Например, $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Решение: Если $\text{Max}(a, b, c) \geq 6$ тогда, $\overline{abc} > 6! = 720$, то $a \geq 7$, так что $\overline{abc} \geq 7! > 1000$. Итак, этот случай невозможен.

Отсюда следует $\text{Max}(a, b, c) \leq 5$, то $\overline{abc} \leq 3 \times 5! = 360$, что означает $a \leq 3$, следовательно $\overline{abc} \leq 3! + 2 \times 5! = 246$. Поэтому у нас есть $a \leq 2$.

Если $a = 2$, то $2! + b! + c! = \overline{2bc} \geq 200$ и $b! + c! \geq 198 > 4! + 5!$, таким образом $b = c = 5$. Но, это невозможно.

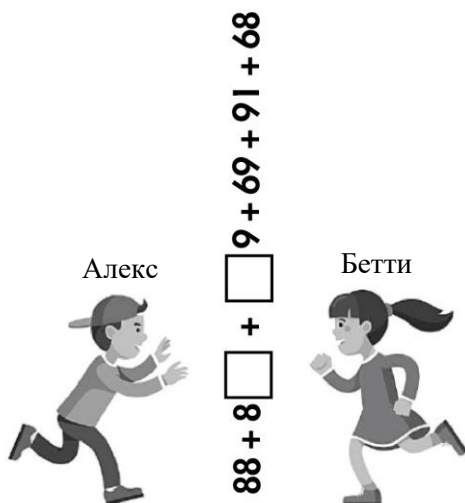
Если $a = 1$, то $1! + b! + c! = \overline{1bc} \geq 100$ и $b! + c! \geq 99$.

У нас есть $1! + 4! < 98 < b! + c! < 200 < 240 = 5! + 5!$.
Отсюда следует, что $b = 5$, $c = 4$, или $b = 4$, $c = 5$.

Поскольку $145 = 1! + 4! + 5! \neq 154$, 145 является единственным решением.

Ответ: 145.

120. Алекс и Бетти стоят лицом друг к другу. Между ними находится последовательность цифр и знак “+”, как показано на схеме ниже. С каждой стороны, Алекс и Бетти видят два разных выражения. Каждая цифра может быть заполнена в двух квадратах так, чтобы их соответствующие выражения имели одинаковое значение. Чему равно значение?



Решение: Пусть a и b — две недостающие цифры, с точки зрения Алекса.

Выражение, которое видит Алекс:

$$89 + 16 + 69 + \overline{ba} + \overline{b8} + 88 = 89 + 16 + 69 + \\ + (60 + a) + (10b + 8) + 88 = 330 + \overline{ba}$$

Пусть c и d — соответствующие цифры, с точки зрения Бетти. Выражение, которое видит Бетти, следующее:

$$88 + \overline{8d} + \overline{c9} + 69 + 91 + 68 = 88 + (80 + d) + \\ + (10c + 9) + 69 + 91 + 68 = 405 + \overline{cd}$$

Следовательно, $\overline{ba} - \overline{cd} = 405 - 330 = 75$, цифра единиц может быть только 0, 1, 6, 8 или 9, поскольку это единственные цифры, которые можно вращать и отражать, следовательно, $\{a, d\}$ может принимать только значение $\{1, 6\}$. Поскольку их можно рассматривать с точки зрения Алекса и Бетти, единственный возможный путь:

$91 - 16 = 75$, мы находим $\overline{ba} = 91$ и $\overline{cd} = 16$. Итак, значение выражения равно $330 + 91 = 405 + 16 = 421$.

Ответ: 421.

121. Каждая из 10 букв A, B, C, D, E, F, G, H, I и J в приведенном ниже примере представляет собой отдельную цифру.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 A & B \\
 C & D \\
 E & F \\
 + & G \\
 \hline
 H & I & J
 \end{array}
 \end{array}$$

Каково максимально возможное значение трехзначного числа $\overline{HIJ}$?

Решение: Самый большой $AB + CD + EF + G$ равен $90 + 80 + 70 + 6 + 5 + 4 + 3 = 255$. Следовательно, $\overline{HIJ} \leq \overline{25J}$. $B + D + F + G + J$ будет иметь одну и ту же единичную цифру с $2J$ и $0 + 1 + 3 + 4 + 6 = 14$, поэтому мы не можем взять $\{B, D, F, G, J\} = \{0, 1, 3, 4, 6\}$.

Рассмотрим случай, когда $\overline{HI} = 24$.

На этот раз $\{A, C, E\} = \{7, 8, 9\}$ не работает, так как $0 + 1 + 3 + 5 + 6 = 15$.

Итак, $\{A, C, E\} = \{9, 8, 6\}$, $0 + 1 + 3 + 5 + 7 = 16$, мы можем взять $\{B, D, F, G, J\} = \{0, 1, 5, 7\}$ и $J = 3$.

Следовательно, максимально возможное значение $\overline{HIJ}$ равно 243.

Примечание. Одним из возможных решений является $90 + 87 + 65 + 1 = 243$.

Ответ: 243.

122. Каждая буква в разности $\overline{HANOI} - \overline{IMSO}$ представляет одну цифру, где разные буквы обозначают разные цифры, а буквы Н и I положительные числа. Сколько существует возможных значений $\overline{IMSO}$ когда результатом разности будет трехзначное число?

Решение: Поскольку $\overline{HANOI} - \overline{IMSO}$ это трехзначное число, то необходимо иметь $\overline{HA} = 10$ и $I = 9$.

Если $N > M$, то $\overline{HANOI} - \overline{IMSO} > 10100 - 9099 = 1001$. Следовательно, $M > N$. Тогда у нас есть 7 возможных цифр, которые можно выбрать в качестве S, 6 возможных цифр, которые можно выбрать в качестве O, и 4 возможных цифры, которые можно выбрать в качестве M (как $M > N$). $7 \times 6 \times 4 = 168$.

Ответ: 168.

123. В 2019 году возраст Питера на четыре больше, чем сумма цифр года его рождения. Каков вероятный возраст Питера (в 2019 году)?

Решение: Мы рассматриваем 2 случая:

- Питер родился в $\overline{20ab}$, где a и b — цифры.

Тогда у нас есть, $2019 - \overline{20ab} = 4 + 2 + a + b$

или $13 = \overline{ab} + a + b = 10a + b + a + b = 11a + 2b$.

Следовательно, $a = 1$ и $b = 1$. В 2019 году Питеру исполнится 8 лет.

- Питер родился в $\overline{19cd}$, где c и d — цифры.

Тогда у нас есть, $2019 - \overline{19cd} = 4 + 1 + 9 + c + d$

или $105 = \overline{cd} + c + d = 10c + d + c + d = 11c + 2d$, или

$$c = \frac{105 - 2d}{11}$$

Поскольку d — цифра, то $\frac{87}{11} = \frac{105-2 \times 9}{11} \leq c \leq \frac{105-2 \times 0}{11} = \frac{105}{11}$, следовательно, $8 \leq c \leq 9$.

Значит, $105 = 11c + 2d$, c не может быть четным, следовательно, $c = 9$. Когда $c = 9$, тогда $d = 3$. У нас есть $\overline{cd} = 93$. В 2019 году Питеру исполнится 26 лет.

Следовательно, в 2019 году Питеру либо 8, либо 26 лет.

Ответ: 8 или 26.

124. Двухзначное число $\overline{ab}$ и число $\overline{ab + 45}$ называются подобными, если сумма цифр $\overline{ab}$ равна сумме цифр $\overline{ab} + 45$. Например: 15 и $15 + 45 = 60$ подобны, потому что сумма цифр каждого числа равна 6. Сколько пар подобных чисел существует?

Решение: Если мы добавим 45 к двухзначному числу, это будет то же самое, что +50 и -5, что по сути заключается в добавлении 5 в цифре десятков и вычитании 5 из цифры единиц, поэтому это означает, что если мы хотим, чтобы сумма цифр $\overline{ab}$ и $\overline{ab} + 45$ была одинаковой, цифра десятков должна быть меньше и равна 4, а цифра единиц должна быть больше и равна 5. Числа, удовлетворяющие условию, следующие: 15, 16, 17, 18, 19, 25, 26, 27, 28, 29, 35, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 47, 48 и 49. Таким образом, существует 20 пар одинаковых чисел, если $\overline{ab} + 45$ это тоже двухзначное число. Однако обратите внимание, что 60 и 105 также похожи. Легко видеть, что цифра десятков должна быть больше или равна 6, а цифра единиц должна быть меньше и равна 4. Числа, удовлетворяющие условию, следующие: 61, 62, 63, 64, 70, 71, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 83, 84, 90, 91, 92, 93 и 94, то есть еще 20 пар. Следовательно, всего существует 40 пар одинаковых чисел.

Ответ: 40 пар.

125. Сколько существует трехзначных чисел $\overline{xyz}$ таких, что x , y и z являются положительными цифрами и $\overline{xy} > \overline{yz} > \overline{zx}$?

Решение: Так как $\overline{xy} > \overline{yz}$, мы получаем $x \geq y$. Так как $\overline{yz} > \overline{zx}$, мы получаем $y \geq z$. Поэтому, $x \geq y \geq z$.

Если $y = z$ и $z \leq x$, так как $\overline{yz} \leq \overline{zx}$, то имеем противоречие.

Поэтому, $x \geq y > z$.

Случай 1: $x = y > z$.

Если $x = y = 9$, то z может быть 1, 2, ..., 8.

Если $x = y = 8$, то z может быть 1, 2, ..., 7.

Мы продолжаем придерживаться этой идеи до тех пор, пока $x = y = 2$ и $z = 1$.

Следовательно, существуют

$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ трехзначных чисел, удовлетворяющих данным условиям.

Случай 2: $x > y > z$

Если $x = 9$ и $y = 8$, то z может быть 1, 2, ..., 7.

Если $x = 9$ и $y = 7$, то z может быть 1, 2, ..., 6.

Мы продолжаем придерживаться этой идеи до тех пор, пока $x = 3$, $y = 2$ и $z = 1$.

Следовательно, существуют $(7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) +$

$+(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) + (5 + 4 + 3 + 2 + 1) +$

$+(4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + (1) = 84$

трехзначных чисел, удовлетворяющих данным условиям.

Таким образом, существуют $36 + 84 = 120$ трехзначных чисел $\overline{xyz}$ таких, что все цифры ненулевые и $\overline{xy} > \overline{yz} > \overline{zx}$.

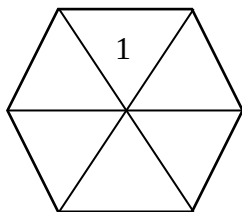
Ответ: 120.

129. Сколько трехзначных положительных целых чисел обладают свойством, согласно которому произведение всех их цифр равно 18?

Решение: Так как $18 = 2 \times 3^2$, то возможными способами выражения 18 как произведения трех цифр являются $1 \times 2 \times 9$, $1 \times 3 \times 6$ и $2 \times 3 \times 3$. Из первого произведения можно составить шесть целых чисел 129, 192, 219, 291, 912 и 921. Аналогично, из произведения $1 \times 3 \times 6$ можно составить шесть целых чисел 136, 163, 316, 361, 613 и 631. Наконец, из произведения $2 \times 3 \times 3$, можно составить три целых числа 233, 323 и 332. Таким образом, общее количество целых чисел, произведение цифр которых равно 18, равно $6 + 6 + 3 = 15$.

Ответ: 15.

130. В шестиугольнике ниже цифра 1 находится в верхнем треугольнике, как показано на рисунке. Сколькими способами можно разместить числа 2, 3, 4, 5 и 6 в оставшихся пустых треугольниках так, чтобы сумма чисел в противоположных треугольниках была ровно 5, 7 и 9?



Решения: Число напротив верхнего треугольника (где стоит 1) может быть только 4 или 6. Теперь рассмотрим оба случая:

Случай 1: Если число, расположенное напротив верхнего треугольника, равно 4.

Есть 4 способа разместить 2 в оставшихся пустых треугольниках, после этого единственное возможное число в противоположном направлении - 5. Теперь есть 2 способа разместить 3 в оставшихся пустых треугольниках, после этого единственное возможное число в противоположном

случае — 6. Следовательно, для этого случая есть $4 \times 2 = 8$ способов.

Случай 2: Если число, расположенное напротив верхнего треугольника, равно 6.

Есть 4 способа разместить 2 в оставшихся пустых треугольниках, после этого единственное возможное число, противоположное ему - это 3. Теперь есть 2 способа разместить 4 в оставшихся пустых треугольниках, после этого единственное возможное число в противоположном случае — 5. Значит, для этого случая есть $4 \times 2 = 8$ способов.

Итого, в целом способов $8 + 8 = 16$.

Ответы: 16.

131. В шахматном турнире участвуют 15 игроков, каждые два игрока играют друг против друга один раз. Победа стоит 2 очка, ничья - 1 очко, а поражение - 0 очков. Приз получает любой игрок, набравший не менее 20 очков. Каково максимальное число обладателей приза?

Решение: У нас может быть целых 9 призеров. Если каждые двое из них сыграют вничью и каждый из них обыграет 6 худших игроков. Затем каждый имеет 8 очков из 8 розыгрышей и 12 очков из 6 побед, всего 20. Общее количество игр равно $\frac{15 \times 14}{2} = 105$, а общее количество очков равно 210. Если бы было 10 призеров, они получили бы 200 очков, оставив только 10 очков 5 худшим игрокам. Однако это невозможно, поскольку эти игроки играют между собой $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ игр, и их общий счет не может быть меньше 20.

Ответ: 9 призеров.

132. В партии 18 человек. Каждый из них пожимает руку хотя бы одному человеку, и никакие два человека не пожимают друг другу руки более одного раза. Если X пожимает руку Y , то X не пожимает руку никому, кто пожимал руку Y . Если X не пожимает руку Y , то X пожимает руку всем, кто пожимал руку Y . Каково максимальное и минимальное количество рукопожатий, которые могут состояться?

Решение: Предположим, мальчик X пожимает руки всем девочкам, но ни одному другому мальчику. Поскольку каждая девочка пожимает руку X , она не пожимает руку ни одной другой девушке. Поскольку каждый мальчик не пожимает руку X , он пожимает руку каждой девочке. Никакие два мальчика не могут пожать друг другу руки, потому что оба пожимают руки девочкам. Отсюда следует, что каждое рукопожатие происходит между мальчиком и девочкой. Чем ближе количество мальчиков к количеству девочек, тем больше у нас будет рукопожатий. Следовательно, максимальное количество рукопожатий происходит, когда есть 9 мальчиков и 9 девочек, всего рукопожатий $9 \times 9 = 81$. У нас не может быть только мальчиков или только девочек, поскольку каждый пожимает руку хотя бы один раз, следовательно, минимальное количество рукопожатий происходит тогда, когда X — единственный мальчик, для общего количества $1 \times 17 = 17$ рукопожатий.

Ответ: Максимальное количество рукопожатий 81 и минимальное количество рукопожатий 17.

133. Председатель комиссии в составе пяти членов постоянно сидит на одном и том же стуле за круглым столом. Сколькими способами можно рассадить остальных четырех участников за один стол, если стульев ровно 8?

Решение: Поскольку председатель будет сидеть на постоянном стуле за круглым столом, то остальные 4 члена смогут выбирать из оставшихся 7 мест. Таким образом, количество способов, которыми первый участник может выбрать место, составляет 7 способов.

Число способов, которыми второй участник может выбрать место, составляет 6 способов.

Третий участник может выбрать место пятью способами.

Четвертый участник может выбрать место четырьмя способами.

Следовательно, количество требуемых способов равно $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ вариантов.

Ответ: 840 способов.

134. Рассмотрим все трехзначные числа, в которых все цифры различны и не используется цифра «0». Найдите сумму всех таких трехзначных чисел.

Решение: Общее количество трехзначных чисел, в которых используются цифры от 1 до 9 без повторения, равно $9 \times 8 \times 7 = 504$. Теперь заметьте, что у каждого числа будет свое «дополнительное» число, такое, что сумма соответствующих цифр двух чисел равна 10, например, 356 и 754. Поскольку, $504 \div 2 = 252$, существуют такие пары и каждая пара в сумме дает $10 \times (100 + 10 + 1) = 1110$, следовательно, требуемая сумма равна $252 \times 1110 = 279720$.

Ответ: 279720.

135. Сколько существует различных четырехзначных чисел, у которых сумма цифр равна 9 и цифра 0 не используется?

Решение: Есть 6 способов выбрать 4 ненулевые цифры, чтобы получить сумму 9:

$$9 = 1 + 1 + 1 + 6 = 1 + 1 + 2 + 5 = 1 + 1 + 3 + 4 =$$

$$= 1 + 2 + 2 + 4 = 1 + 2 + 3 + 3 = 2 + 2 + 2 + 3$$

Есть 4 способа расстановки (1, 1, 1, 6) и (2, 2, 2, 3).

Существует 12 способов расстановки каждого из набора (1, 1, 2, 5), (1, 1, 3, 4), (1, 2, 2, 4), (1, 2, 3, 3).

Таким образом, существуют $4 \times 2 + 12 \times 4 = 56$ разные четырехзначных числа.

Ответ: 56.

136. Сколькими способами можно выбрать три разных числа из чисел от 1 до 15 так, чтобы их сумма была кратна 4?

Решение: Разложите числа в 4 стопки.

В стопке А содержатся числа, делящиеся на 4: (4, 8, 12).

В стопке В содержатся числа, которые при делении на 4 дают остаток единицу: (1, 5, 9, 13).

В куче С содержатся числа, которые при делении на 4 дают остаток 2: (2, 6, 10, 14).

В куче D содержатся числа, которые при делении на 4 дают остаток 3: (3, 7, 11, 15).

Если мы возьмем три числа из двух разных стопок так, чтобы одно число было из одной стопки, а два других числа — из другой, то возможны три случая:

Случай I. Две стопки — это стопка А и С. Таким образом, имеется одно число из стопки А и два числа из стопки С.

Это можно сделать $3 \times \frac{4 \times 3}{2} = 18$ различными способами.

Случай II. Две стопки — это стопка В и С. Таким образом, есть одно число из стопки С и два числа из стопки В. Это можно сделать $4 \times \frac{4 \times 3}{2} = 24$ различными способами.

Случай III. Две стопки — это стопка С и D. Таким образом, есть одно число из стопки С и два числа из стопки D. Это можно сделать $4 \times \frac{4 \times 3}{2} = 24$ различными способами.

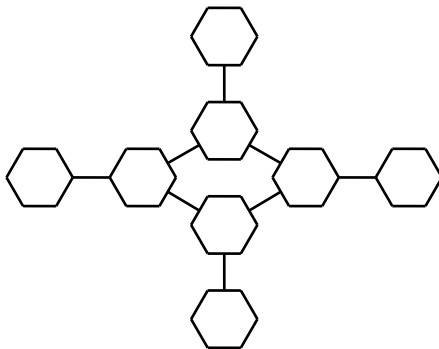
Если мы возьмем три числа из трех разных стопок так, чтобы одно число было из одной стопки, то эти три стопки должны быть стопкой А, В и D. Это можно сделать

$3 \times 4 \times 4 = 48$ разными способами.

Любая другая комбинация не даст кратное 4. Итак, в общей сложности у нас есть $1 + 18 + 24 + 24 + 48 = 115$ способов.

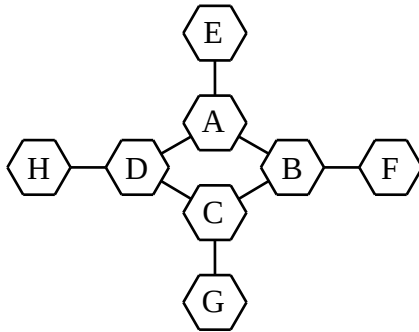
Ответ: 115 способов.

137. Каждый шестиугольник окрашен в красный, желтый или синий цвет так, что ни один из двух шестиугольников, соединенных отрезком прямой, не имеет одинакового цвета. Сколькими способами можно раскрасить диаграмму?



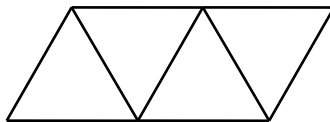
Решение: Поскольку средние шестиугольники имеют больше соединений отрезков, мы сначала раскрасим их. Если цвета шестиугольника А и шестиугольника С одинаковы, у нас будет 3 способа раскрасить А и С, 2 способа раскрасить В, 2 способа раскрасить D, значит, у нас есть $3 \times 2 \times 2 = 12$ способов. Если цвета шестиугольника А и шестиугольника С различны, у нас будет 3 способа раскрасить А, 2 способа раскрасить С, 1 способ раскрасить В, 1 способ раскрасить D, поэтому у нас есть $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ способов. Итак, всего у нас есть $12 + 6 = 18$ способов

раскрасить A, B, C и D. У нас есть по 2 способа раскрасить E, F, G и H. Следовательно, ответ $18 \times 2^4 = 288$.

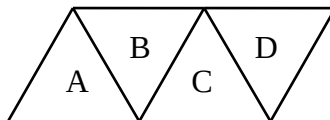


Ответ: 288.

138. На схеме, изображенной ниже, раскрасьте каждый из равносторонних треугольников любым из 4 цветов: синим, желтым, зеленым или красным так, чтобы ни один из двух треугольников не был одинакового цвета. Сколько существует различных способов раскрасить диаграмму? (Два способа раскраски диаграммы считаются одинаковыми, если мы можем получить одну раскраску из другой, повернув всю диаграмму, при этом отражение диаграммы будет считаться другой раскраской).



Решение: Обозначьте равносторонние треугольники, как показано на рисунке.



Есть 4 варианта раскраски для треугольника А, 3 варианта для треугольника В, 2 варианта для треугольника С и только 1 вариант для треугольника D, поэтому существуют $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ возможных способов раскраски. А поскольку два способа раскраски считаются одинаковыми при вращении, то существуют $24 \div 2 = 12$ разных способов раскраски.

Ответ: 12.

139. Пусть n - целое положительное число, такое, что все его цифры различны и его сумма цифр равна 17. Если $n < 2018$, то сколько существует различных возможных значений n ?

Решение:

- У нас есть только 2 числа среди двузначных 89 и 98.
- Для трехзначных чисел:
 - 1) когда $17 = 0 + 8 + 9$, у нас есть $2 \times 2 \times 1 = 4$ числа.
 - 2) когда $17 = 1 + 7 + 9$, у нас есть $3 \times 2 \times 1 = 6$ чисел.
 - 3) когда $17 = 2 + 6 + 9 = 2 + 7 + 8$, у нас есть $2 \times (3 \times 2 \times 1) = 12$.
 - 4) когда $17 = 3 + 5 + 9 = 3 + 6 + 8$, у нас есть $2 \times (3 \times 2 \times 1) = 12$.
 - 5) когда $17 = 4 + 5 + 8 = 4 + 6 + 7$, у нас есть $2 \times (3 \times 2 \times 1) = 12$.В целом у нас есть $4 + 6 + 12 + 12 + 12 = 46$ трехзначных значений.
- Для четырехзначных чисел, с 2000 по 2018 год ни в одном из них сумма цифр не равна 17. Для чисел от 1000 до 1999 мы просто обнаруживаем, что сумма последних трех цифр равна 16.
 - 1) когда $16 = 0 + 7 + 9$, у нас есть $3 \times 2 \times 1 = 6$ чисел.
 - 2) когда $16 = 2 + 5 + 9 = 2 + 6 + 8$, у нас есть $2 \times (3 \times 2 \times 1) = 12$ чисел.
 - 3) когда $16 = 3 + 4 + 9 = 3 + 5 + 8 = 3 + 6 + 7$, у нас есть $3 \times (3 \times 2 \times 1) = 18$ чисел.
 - 4) когда $16 = 4 + 5 + 7$, у нас есть $3 \times 2 \times 1 = 6$.Итого у нас есть $6 + 12 + 18 + 6 = 42$ значения.

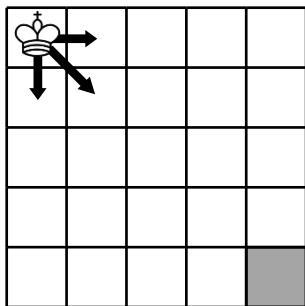
Следовательно, у нас есть $2 + 46 + 42 = 90$ разных возможных значений n .

Ответ: 90.

Примечание. Эти цифры следующие:

89	98	197	179	269	296	278	287	359	395
368	386	458	485	467	476	539	593	548	584
629	692	638	683	647	674	719	791	728	782
746	764	809	890	827	872	836	863	845	854
908	980	917	971	926	962	935	953	1097	1079
1286	1268	1259	1295	1349	1394	1358	1385	1367	1376
1439	1493	1457	1475	1529	1592	1538	1583	1547	1574
1628	1682	1637	1673	1709	1790	1736	1763	1754	1745
1826	1862	1835	1853	1907	1970	1925	1952	1943	1943

140. На каждом шаге шахматная фигура на доске, показанная на схеме, может перемещаться на 1 клетку в одном из трех направлений: вправо, вниз или вниз по диагонали вправо. Сколькими способами он может переместиться из верхнего левого угла в нижний правый ровно за 6 шагов?



Решение: Пусть x , y и z обозначают количество движений вправо, вниз и вправо-вниз соответственно в шестишаговом пути, начиная сверху - левый угол в правый нижний угол. Следовательно, мы имеем: $x + y + z = 6$.

Чтобы переместиться из верхнего левого угла в правый нижний угол (не двигаясь ни влево, ни вверх), шахматная фигура должна переместиться на 4 клетки вправо и на 4 клетки вниз, что означает $x + z = 4$, $y + z = 4$.

Следовательно, $x = y = z = 2$.

И наоборот, можно легко проверить, что любой шестишаговый путь, начинающийся из верхнего левого угла и состоящий из двух шагов вправо, двух шагов вниз и двух шагов вправо вниз, достигает правого нижнего угла.

Следовательно, число способов перемещения шахматной фигуры равно числу последовательностей, состоящих из двух шагов вправо, двух шагов вниз и двух шагов вправо-вниз, и равно $C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 = 90$.

Ответ: 90 способов.

141. Используя цифры 1, 3, 5, 7 и 9 для образования трехзначных чисел (каждая цифра может быть использована более одного раза), сколько из них кратно 3?

Решение: Нечетными цифрами являются 1, 3, 5, 7 и 9. Поскольку все цифры трехзначных чисел, кратных 3, нечетны, сумма цифр представляет собой нечетное число, которое меньше или равно $9 + 9 + 9 = 27$. Таким образом, возможные значения суммы цифр — 3, 9, 15, 21 и 27.

Если сумма цифр равна 3 и $3 = 1 + 1 + 1$, то трёхзначное число равно 111.

Если сумма цифр равна 9 и $9 = 1 + 1 + 7 = 1 + 3 + 5 = 3 + 3 + 3$, то существует 3 трехзначных числа, составленных из 1, 1 и 7, существует 6 трехзначных чисел, составленных из 1, 3 и 5, и 1 трехзначное число, составленное из 3, 3 и 3. Значит, таких чисел ровно $3 + 6 + 1 = 10$.

Если сумма цифр равна 15 и $15 = 1 + 5 + 9 = 1 + 7 + 7 = 3 + 3 + 9 = 3 + 5 + 7 = 5 + 5 + 5$, то имеется 6 трёхзначных чисел, составленных из 1, 5 и 9, также имеется 3 трёхзначных числа, составленных из 1, 7 и 7, имеется 3 трёхзначных числа, составленных из 3, 3 и 9, получается 6 трехзначных чисел, образованных 3, 5 и 7, и 1 трехзначное

число, образованное 5, 5 и 5. Следовательно, существуют $6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 19$ чисел.

Если сумма цифр равна 21 и $21 = 3 + 9 + 9 = 5 + 7 + 9 = 7 + 7 + 7$, то существует 3 трехзначных числа, образованных 3, 9 и 9, существует 6 трехзначных чисел, образованных 5, 7 и 9, и имеется 1 трехзначное число, составленное из 7, 7 и 7. Итак, есть $3 + 6 + 1 = 10$ чисел.

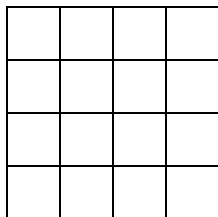
Если сумма цифр равна 27 и $27 = 9 + 9 + 9$, то трехзначное число равно 999. Такое число всего одно.

Следовательно, в общей сложности существуют

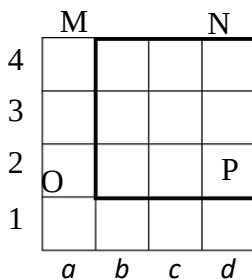
$1 + 10 + 19 + 10 + 1 = 41$ трехзначных чисел, кратных 3, таких, что все три цифры нечетные.

Ответ: 41.

142. Используя 16 черных пешек и 16 белых пешек, сколькими способами можно расставить 16 пешек на шахматной доске 4×4 , где каждая пешка занимает 1 клетку, так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце количество белых пешек было четным?



Решение: Рассмотрим квадрат OMNP, состоящий из $3 \times 3 = 9$ квадратов размера 1×1 , как показано на рисунке ниже.



В каждую клетку можно поставить либо белую, либо черную пешку, поэтому существует $2^9 = 512$ возможных вариантов размещения 9 пешек в этих 9 клетках. Пусть 1-я строка и столбец a будут соответственно строкой «корректировки» и столбцом «корректировка» (т.е. где мы «корректируем» соответствующее количество белых пешек в строках и столбцах). Рассмотрим квадрат OMNP: если в k -м ряду ($2 \leq k \leq 4$) есть четное количество белых пешек, то на клетку корректировки (a, k) будет поставлена черная пешка.

Напротив, если в k -м ряду есть нечетное количество белых пешек, то на клетку перестройки (a, k) будет поставлена белая пешка. Следовательно, после корректировки все ряды со 2-го по 4-й будут содержать четное количество белых пешек.

Аналогично выполнив эту процедуру для столбцов b, c, d с соответствующими клетками настройки $(b, 1), (c, 1), (d, 1)$, мы гарантируем четное количество белых пешек в каждом из столбцов b, c, d .

Осталось доказать, что для каждого из 512 вышеперечисленных размещений существует только один способ поставить пешки на последнюю клетку, то есть на клетку $(a, 1)$, причем так, чтобы количество белых пешек как в 1-м ряду, так и в столбце a было четным.

Пусть общее количество белых пешек, размещенных в квадрате OMNP, равно m , общее количество белых пешек, размещенных на клетках $(a, 2), (a, 3), (a, 4)$, равно p , а общее количество белых пешек, размещенных на клетках $(b, 1), (c, 1), (d, 1)$, равно q . Так как количество белых пешек в 3 строках и 3 столбцах четное, то имеем:

$m + p = 2u$ и $m + q = 2v$, следовательно, $p - q = 2(u - v)$, т.е. p и q имеют одинаковую четность.

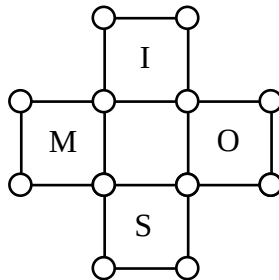
Если p и q оба четные, то белая пешка ставится на клетку $(a, 1)$.

Если p и q оба нечетные, то черная пешка ставится на клетку $(a, 1)$.

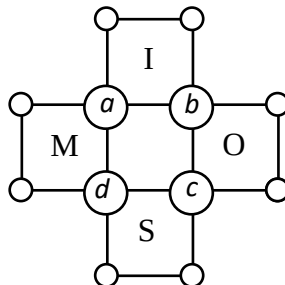
Таким образом, для каждого произвольного размещения 9 пешек в квадрате OMNP, всегда существует только один способ расположить пешки в квадратах настройки так, чтобы количество белых пешек в каждой из 4 строк и 4 столбцов было четным. Короче говоря, существует 512 возможных размещений 16 пешек, удовлетворяющих заданным требованиям.

Ответ: 512.

143. Есть четыре квадрата, обозначенных как I, M, S и O, как показано на схеме. Каждая вершина этих квадратов окрашена в один из трех цветов: синий, красный, желтый. Раскраска называется «четной», если в каждом из четырех квадратов 4 вершины окрашены ровно в два цвета, так что 2 вершины одного цвета, а остальные 2 вершины другого цвета. Сколько существует разных четных вариантов раскраски?



Решение: Обозначим вершины внутреннего квадрата a, b, c и d , как показано на схеме ниже.



Рассмотрим произвольную раскраску этих четырех вершин. Если две вершины a и b имеют один и тот же цвет, скажем, синий, то есть два способа равномерно раскрасить оставшиеся вершины квадрата I: обе в красный или обе в желтый. Если две вершины a и b имеют разные цвета, скажем, красный и синий, то есть также два способа равномерно раскрасить остальные вершины квадрата I: красно-синий или сине-красный. В любом случае для каждой раскраски двух вершин a и b существует два способа равномерно раскрасить квадрат I.

Тот же аргумент справедлив и для квадратов M, S и O. Следовательно, для каждой раскраски внутреннего квадрата существуют $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ четные раскраски. Поскольку существует $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ способ раскрасить внутренний квадрат (каждая вершина может быть в один из трёх цветов), то всего раскрасок четных $81 \times 16 = 1296$.

Ответ: 1296.

146. В классе А учатся 10 человек, а в классе В - 15 человек. В тесте средний балл для класса А - 60, а средний балл для класса В - 66. Новый ученик отвечает на тот же тест в офисе. Если его зачислить в класс А, то средний балл нового класса станет 62. Если его зачислят в класс В, каким будет его новый средний балл?

Решение: 10 учеников класса А набрали в общей сложности $60 \times 10 = 600$ баллов. С учетом нового 11-го студента баллы будут в общей сложности равны $62 \times 11 = 682$. Следовательно, оценка нового студента равна $682 - 600 = 82$. 15 учеников класса В набрали в общей сложности $66 \times 15 = 990$ баллов. С учетом нового студента 16 из них набрали в общей сложности $990 + 82 = 1072$ баллов. Следовательно, новое среднее значение для класса В будет равно $1072 \div 16 = 67$.

Ответ: 67.

147. Тридцать девочек участвовали в математическом конкурсе. Первая девочка набрала 70, а вторая - 80. Затем учитель объявил, что оценка каждой девочки после первых двух равна среднему из оценок всех девочек до нее. Какой будет оценка последней девочки?

Решение: Средний балл первых двух девушек равен $\frac{70+80}{2} = 75$, что соответствует баллу третьей девушки. Добавление ее в группу не изменит общий средний балл, так что балл четвертой девушки также равен 75. Фактически, баллы всех девочек, кроме первых двух, равны 75.

Ответ: 75.

148. В последовательности первые два члена равны 64 и 36. Каждый последующий член является средним значением предыдущих. Найдите сумму первых 2018 членов последовательности.

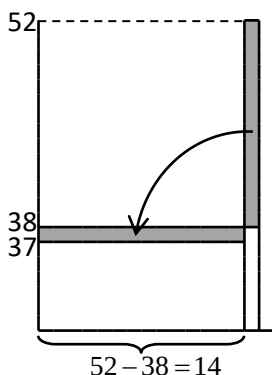
Решение: 3-й член последовательности $\frac{64+36}{2} = 50$, 4-ое значение $\frac{64+36+50}{3} = 50$, 5-ое значение последовательности $\frac{64+36+50+50}{4} = 50$. Теперь мы можем обобщить. Среднее значение первых двух слагаемых было 50, и после этого мы продолжаем добавлять 50, потому что среднее значение всегда равно 50. Следовательно, значение 2018-го члена последовательности также будет равно 50. Следовательно, сумма первых 2018 слагаемых равна $64 + 36 + 2016 \times 50 = 2018 \times 50 = 100900$.

Ответ: 100900.

149. Существуют различные целые положительные числа, среднее число которых равно 38. Известно, что 52 — одно из таких чисел. Если удалить 52, то среднее значение

оставшихся целых чисел станет 37. Найдите максимально возможное положительное целое число среди этих целых чисел.

Решение: Когда удаляется 52, среднее оставшихся целых чисел уменьшается на 1, следовательно, остаются $52 - 38 = 14$ числа после удаления 52. И их сумма $37 \times 14 = 518$. Пусть 13 чисел будут как можно меньшими, тогда их сумма равна $1 + 2 + 3 + \dots + 12 + 13 = 91$, мы можем получить максимально возможное положительное целое число $518 - 91 = 427$.



Ответ: 427.

150. У Али 5 последовательных номеров, а у Бена 7 последовательных номеров. Если второе число Али равно 5, а сумма чисел Али и Бена равна 128, каково наибольшее из чисел Бена?

Решение: Если второе число Али равно 5, то его числа равны 4, 5, 6, 7, 8, а их сумма равна 30. Отсюда мы получили сумму чисел Бена $128 - 30 = 98$.

Поскольку у Бена 7 последовательных чисел, следовательно, его среднее число равно $98 \div 7 = 14$, а наибольшее число равно $14 + 3 = 17$.

Ответ: 17.

154. На выборах планировали голосовать только 80% людей. Однако фактически проголосовали только 85% тех, кто хотел голосовать. Каков процент людей, которые действительно проголосовали?

Решение: $\frac{80}{100} \times \frac{85}{100} \times 100\% = 68\%$.

Ответ: 68%

155. Алиса отдает $\frac{1}{4}$ от всех своих яблок Брайану, а затем отдает $\frac{1}{3}$ от оставшихся яблок Колину. Если оставшиеся у Алисы яблоки стоят 13500 рупий, какова общая стоимость яблок, которые Колин получил от Алисы?

Решение: Колин получает $\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ яблок Алисы, у Алисы остается тогда $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Поскольку оставшиеся яблоки Алисы стоят 13500 рупий, то яблоки Колина стоят $13500 \div 2 = 6750$ рупий.

Ответ: 6750 рупий.

156. У мальчика есть чашка чая, а у девочки — пустой стакан такого же объема, как и чашка. На первом этапе мальчик наливает $\frac{1}{2}$ чая из чашки в стакан. На втором этапе девушка наливает $\frac{1}{3}$ чая из стакана в чашку. На третьем этапе мальчик наливает $\frac{1}{4}$ чая из чашки в стакан. На четвертом этапе девушка наливает $\frac{1}{5}$ чая из стакана в чашку. Это попеременное переливание продолжается так, что на каждом этапе знаменатель увеличивается на 1. Какая часть чая окажется в чашке после тринадцатого шага?

Решение: После первого шага в чашке явно есть $\frac{1}{2}$ чая. После третьего шага количество чая осталось прежним $\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$. После пятого шага количество чая осталось прежним $\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$. Фактически, после каждого нечетного шага количество чая в чашке всегда будет равно $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

157. Есть три дроби, все из которых имеют наименьшее значение. Числители и знаменатели представляют собой положительные целые числа. Отношение их числителей находятся в соотношении 3:2:4, а отношение их знаменателей в соотношении 5:9:15. Если сумма эти трех дробей равна $\frac{28}{45}$, чему равна сумма их знаменателей?

Решение: Предположим, что три дроби равны $\frac{3}{5}, \frac{2}{9}, \frac{4}{15}$, их сумма равна $\frac{27}{45} + \frac{10}{45} + \frac{12}{45} = \frac{49}{45}$. Поскольку реальная сумма этих трех дробей равна $\frac{28}{45}$, что в $\frac{28}{45} \div \frac{49}{45} = \frac{4}{7}$ раза больше наших предполагаемых трех дробей. Следовательно, эти три дроби равны $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}, \frac{2}{9} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{63}, \frac{4}{15} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{105}$. Значит, сумма их знаменателей равна $35 + 63 + 105 = 203$.

Ответ: 203.

158. В классах А и В одинаковое количество учеников.

- Число учащихся класса А, принявших участие в олимпиаде по математике, составляет одну треть от числа учащихся класса В, не принимавших участия.

- Число учащихся класса В, принявших участие в олимпиаде по математике, составляет одну пятую от числа учащихся класса А, не принимавших участия.

Найдите отношение числа учащихся, не принимавших участия в олимпиаде в классе А, к числу учащихся, не принимавших участия и в классе В.

Решение: Пусть a и b — количество учеников, не принявших участие в олимпиаде по математике в классах А и В соответственно. Тогда общее количество учеников в классе А равно $a + \frac{1}{3}b$, а общее количество учеников в классе В равно $b + \frac{1}{5}a$. Поскольку в классе А и В одинаковое количество учеников, мы имеем

$a + \frac{1}{3}b = b + \frac{1}{5}a$, следовательно $\frac{4}{5}a = \frac{2}{3}b$, т. е. $12a = 10b$ и $a : b = 5 : 6$.

Ответ: 5 : 6.

159. Какое число можно прибавить к 170 и 30 так, чтобы суммы оказались в соотношении 3:1?

Решение: Разница между двумя числами равна

$170 - 30 = 140$, что в $3 - 1 = 2$ раза меньшего числа после сложения неизвестного числа, поэтому меньшее число равно $140 \div 2 = 70$. Следовательно, добавленное число равно $70 - 30 = 40$.

Ответ: 40.

160. Сэм, Том и Уна — повара в ресторане. Сегодня они приготовили в общей сложности 320 тарелок спагетти, из которых Сэм готовил 6 часов, Том — 8 часов, а Уна — 5 часов. Они также готовили спагетти на разной скорости: Сэм готовил 5 тарелок на каждые три, приготовленные

Томом, и на каждые две, приготовленные Уной. Сколько тарелок спагетти приготовил сегодня Сэм?

Решение: Если умножить нормы труда на часы, отработанные каждым поваром, мы получим соотношение их эффективной общей загруженности. Сэм : Том : Уна = $=30 : 24 : 10$. Итак, на каждые 64 тарелки Сэм готовит 30, Том готовит 24, а Уна готовит 10. Так как $320 \div 64 = 4$, то Сэм готовит $5 \times 30 = 150$ тарелки.

Ответ: 150.

161. Работа в образовательном парке Хай Лианг может быть выполнена Алексом за 6 часов, а Бобом за 10 часов. Алекс работает в течение часа, затем Боб продолжает работу в течение часа. Если они повторяют эту схему, за сколько часов будет выполнена работа? Выразите ваш ответ в виде обыкновенной дроби.

Решение: Пусть общий объем работы, которую необходимо выполнить, составляет 30 единиц, тогда работа, выполненная Алексом, составляет 5 единиц в час, а Бобом — 3 единицы в час. Итак, работа, выполненная за каждые два часа, равна 8 единицам, следовательно, работа, оставшаяся после $2 \times 3 = 6$ часов работы, равна $30 - 8 \times 3 = 6$ единицам. Когда Алекс работает над заданием еще один час, оставшаяся работа будет равна $6 - 5 = 1$ единице. Следовательно, Бобу нужно $\frac{1}{3}$ часа, чтобы закончить работу. Следовательно, ответ $6 + 1 + \frac{1}{3} = 7\frac{1}{3} = \frac{22}{3}$ часов.

Ответ: $\frac{22}{3}$.

162. В приведенном ниже выражении каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 должно быть помещено в отдельный квадрат ровно один раз.

$$\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square}} + \square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square}} + \square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square}}$$

Каково максимальное значение этого выражения?

Решение: Чтобы максимизировать значение выражения, три числа на основном уровне должны быть 7, 8 и 9. Числа на втором подуровне должны быть 4, 5 и 6, оставляя 1, 2 и 3 для первого подуровня. Внутри каждого уровня числа могут идти в любом порядке, за исключением чисел на двух подуровнях, где они должны располагаться в обратном порядке с точки зрения значения. Следовательно, максимальное значение выражения равно

$$7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}} + 8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}} + 9 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} = 25 \frac{620}{1001}.$$

Ответ: $25 \frac{620}{1001}$.

163. Пусть a и b - целые положительные числа, такие, что $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{9}{11}$. Найдите значение $a + b$, когда b принимает наименьшее возможное значение.

Решение: Поскольку a и b — целые числа, из $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{9}{11}$, мы получаем $\frac{5}{7}b < a < \frac{9}{11}b$.

Если $b = 1$, тогда $0 < \frac{5}{7} < a < \frac{9}{11} < 1$, что невозможно.

Если $b = 2$ тогда $1 < \frac{10}{7} < a < \frac{18}{11} < 2$, что невозможно.

Если $b = 3$, тогда $2 < \frac{15}{7} < a < \frac{27}{11} < 3$, что невозможно.

Если $b = 4$, тогда $3 < \frac{20}{7} < a < \frac{36}{11} < 4$, это возможно при $a = 3$ и следовательно $a + b = 7$

Ответ: 7.

164. Единичные дроби – это дроби, у которых числитель равен 1, а знаменатель – любое целое положительное число. Выразите число 1 как сумму семи различных единичных дробей, учитывая, что пять из них — это $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{15}$ и $\frac{1}{30}$. Найдите произведение двух оставшихся дробей.

Решение: Сумма последних двух долей единицы равна

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{30} = \frac{23}{90}$$

Поскольку эти дроби различны, мы ищем две оставшиеся единичные дроби из $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$. Если обе дроби меньше $\frac{1}{8}$, то их сумма меньше $\frac{1}{4}$, что меньше $\frac{23}{90}$, что является противоречием. Следовательно, большая из этих двух дробей должна быть одной из $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, однако $\frac{23}{90} - \frac{1}{4} = \frac{1}{180}$, $\frac{23}{90} - \frac{1}{6} = \frac{8}{90}$, $\frac{23}{90} - \frac{1}{7} = \frac{71}{630}$ единственными возможными значениями этих двух дробей являются $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{180}$, следовательно, их произведение равно $\frac{1}{720}$.

Ответ: $\frac{1}{720}$.

165. Двадцать четыре положительных числа расположены в круге, где каждое число равно произведению двух своих соседей. Если два соседних числа — 3 и 4, какова сумма всех двадцати четырех чисел?

Решение: Следующие несколько чисел по другую сторону

$$\begin{aligned} \text{от } 4: 4 \div 3 &= \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \div 4 = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \div \frac{4}{3} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} \div \frac{1}{3} &= \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3, 3 \div \frac{3}{4} = 4. \end{aligned}$$

Повторное появление цифры 3, за которой следует цифра 4, означает, что 24 числа будут повторяться циклами длиной 6. Следовательно, сумма всех двадцати четырех чисел равна $4 \times (3 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = 38\frac{2}{3}$.

Ответ: $38\frac{2}{3}$.

166. Пусть a, b и c — различные натуральные числа такие, что $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Каково наименьшее возможное значение $a + b + c$?

Решение: Заметим, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. Также обратите внимание, что $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ — это разделение с использованием трех различных единичных дробей с наименьшими возможными знаменателями.

Зная это, можем преобразовать $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{42} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{84} + \frac{1}{126} + \frac{1}{252}$, поэтому наименьшее возможное значение $a + b + c = 84 + 126 + 252 = 462$.

Ответ: 462.

167. Найдите наибольшее целое число меньше или равное следующему выражению

$$\frac{1}{\frac{1}{1985} + \frac{1}{1985} + \frac{1}{1987} + \dots + \frac{1}{2015}}?$$

Решение: Пусть, $s = \frac{1}{1985} + \frac{1}{1985} + \frac{1}{1987} + \dots + \frac{1}{2015}$. Тогда мы сможем получить,

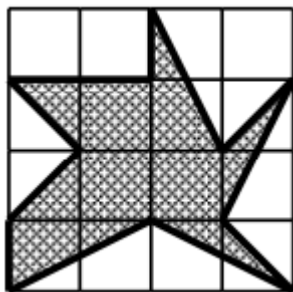
$$\underbrace{\frac{1}{2015} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2015} + \dots + \frac{1}{2015}}_{31 \text{ раз}} < s < \underbrace{\frac{1}{1985} + \frac{1}{1985} + \frac{1}{1985} + \dots + \frac{1}{1985}}_{31 \text{ раз}}$$

Значит, $\frac{31}{2015} < s < \frac{31}{1985}$, тогда для обратных дробей выполняется условие $64 \frac{1}{31} < \frac{1}{s} < \frac{2015}{31} = 65$.

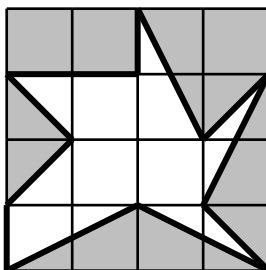
Следовательно, наибольшее целое число, меньшее или равное выражению, равно 64.

Ответ: 64.

172. На приведенной ниже диаграмме каждый из маленьких квадратов имеет размеры 1 см на 1 см в большой таблице 4 см на 4 см. Найдите площадь 11 - гранного многоугольника в см^2 .



Решение: Обратитесь к схеме справа, обратите внимание, что площадь всего квадрата равна 16 см^2 .

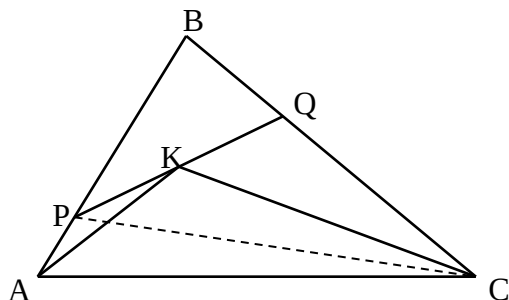


Заштрихованная часть по нижнему краю имеет площадь 2 см^2 , заштрихованная часть по правому краю имеет площадь $1,5 \text{ см}^2$, заштрихованная часть по левому краю имеет площадь 1 см^2 , заштрихованная часть, расположенная слева сверху угла, имеет площадь 2 см^2 , а заштрихованная часть, расположенная в правом верхнем углу, имеет площадь $2,5 \text{ см}^2$. Следовательно, площадь 11-стороннего многоугольника равна:

$$16 - 1,5 - 2 - 1 - 2 - 2,5 = 7 \text{ см}^2.$$

Ответ: 7 см^2 .

173. Точки Р и Q лежат на сторонах АВ и ВС треугольника ABC соответственно так, что $BP = 3PA$, $QC = 2BQ$ и точка К - середина отрезка PQ. Если площадь треугольника ABC равна 120 см^2 , найдите площадь треугольника AKC в см^2 .



Решение: Соединим CP.

В $\triangle ABC$ и $\triangle PBC$ $BP = \frac{3}{4}AB$ и они имеют общую высоту относительно C, следовательно, площадь $\triangle PBC$ равна $\frac{3}{4} \times 120 = 90 \text{ см}^2$.

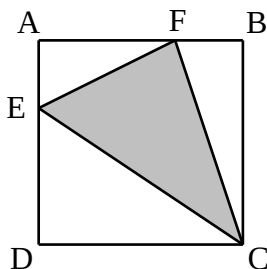
В $\triangle PBC$ и $\triangle PQC$ $QC = \frac{2}{3}BC$ и они имеют общую высоту от P , следовательно, площадь $\triangle PQC$ равна $\frac{2}{3} \times 90 = 60 \text{ см}^2$, а площадь $\triangle PQB$ равна $\frac{1}{3} \times 90 = 30 \text{ см}^2$.

В $\triangle PQC$ и $\triangle KQC$ $KQ = \frac{1}{2}PQ$ они имеют общую высоту от C , следовательно, площадь $\triangle KQC$ равна $\frac{1}{2} \times 60 = 30 \text{ см}^2$.

Площадь $\triangle PBC$ равна площади $\triangle BKC$, которая равна 15 см^2 , следовательно, площадь $\triangle PKA$ равна $\frac{1}{3} \times 15 = 5 \text{ см}^2$. Следовательно, площадь $\triangle AKC$ равна $120 - 30 - 5 - 30 = 55 \text{ см}^2$,

Ответ: 55 см^2 .

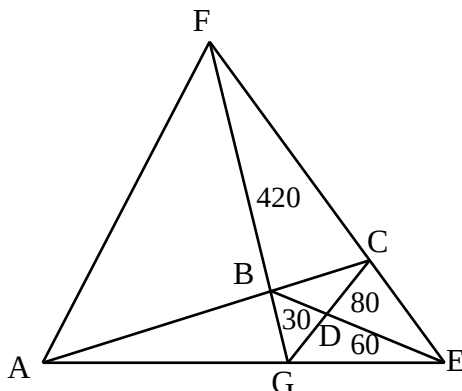
174. На рисунке ниже изображен квадрат $ABCD$, E - точка на AD и F - точка на AB , такая, что $DE = 2AE$ и $AF = 2BF$. Каково отношение площади $\triangle CEF$ к площади квадрата $ABCD$?



Решение: Мы можем принять $AE = FB = 1$ так, что $DE = AF = 2$. Тогда площадь квадрата $ABCD$ равна 9, площадь $\triangle AEF$ равна 1, площадь $\triangle BFC$ равна 1,5 и площадь $\triangle DCE$ равна 3. Следовательно, площадь $\triangle CEF$ такова $9 - 1 - 1,5 - 3 = 3,5$, что соотношение площадей $\triangle CEF$ к $ABCD$ составляет $3,5 : 9 = 7 : 18$.

Ответ: $7 : 18$.

175. Треугольник разделен на семь треугольников. Четыре из них имеют площади 420 см^2 , 80 см^2 , 60 см^2 и 30 см^2 , как показано на рисунке ниже. Найдите площадь треугольника AEF.



Решение: Один из способов решения этой проблемы — сравнение площадей пар треугольников, используя результат, согласно которому отношение площадей треугольников одинаковой высоты равно отношению их оснований:

$$\triangle GDE : \triangle CDE = GD : DC = \triangle GDB : \triangle BDC, \text{ значит } 60 : 80 = 30 : z, \text{ отсюда получаем } z = 40.$$

$$\triangle AGB : \triangle EGB = AG : GE = \triangle AGC : \triangle EGC, \text{ значит } y : 90 = (y + 40 + 30) : (80 + 60), \text{ отсюда получаем } y = 126.$$

$$\triangle AFG : \triangle EFG = AG : GE = \triangle AGC : \triangle GCE, \text{ значит } (x+126) : (420+30+40+60+80) = (126+40+30) : (80+60), \text{ отсюда получаем } x = 756.$$

$$(\text{Или } \triangle FAB : \triangle FBE = AG : GE = \triangle AGC : \triangle GCE)$$

Таким образом, площадь $\triangle AEF$ равна $756 + 420 + 126 + 30 + 40 + 60 + 80 = 1512 \text{ см}^2$.

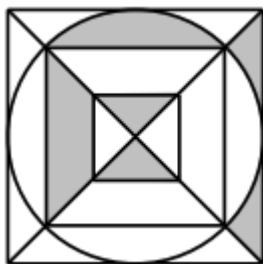
Ответ: 1512 см^2 .

176. Девять прямых, параллельных основанию треугольника, делят каждую из его двух сторон на 10 равных отрезков, а площадь - на 10 различных частей. Найдите площадь исходного треугольника в см^2 , если площадь наибольшей из этих частей равна 76 см^2 .

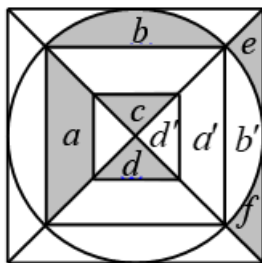
Решение: Пусть основания равны $b, 2b, 3b, \dots, 10b$, а высоты $h, 2h, 3h, \dots, 10h$ и эти прямые образуют подобные треугольники. Площадь наибольшей области равна площади наибольшего треугольника (исходного треугольника) минус площадь следующего по величине треугольника. Имеем: $\frac{10b \times 10h - 9b \times 9h}{2} = \frac{19bh}{2} = 76 \text{ см}^2$, следовательно, $bh = 8 \text{ см}^2$. Таким образом, площадь исходного треугольника равна $\frac{10b \times 10h}{2} = 50bh = 400 \text{ см}^2$.

Ответ: 400 см^2 .

177. На приведенном ниже рисунке длина стороны самого большого квадрата составляет 10 см. Если общая площадь заштрихованных областей равна 26 см^2 , то какова длина стороны самого маленького квадрата в см?



Решение: Обозначим каждую заштрихованную область маленькими буквами, как показано на схеме.



Обратите внимание, что область a совпадает с площадью области a' , сектор b совпадает с площадью сектора b' , а треугольник d совпадает с треугольником d' .

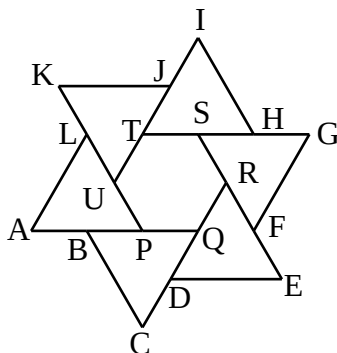
Мы знаем, что площадь наибольшего квадрата равна $10 \times 10 = 100 \text{ см}^2$. Мы также знаем, что две диагонали делят диаграмму на четыре равные части, площадь каждой из которых равна $100 \div 4 = 25 \text{ см}^2$. Обратите внимание, что общая площадь заштрихованных областей равна площади самого большого треугольника и области c , что означает, что площадь $c = 26 - 25 = 1 \text{ см}^2$.

Поскольку область c — один из четырех наименьших треугольников внутри диаграммы, площадь наименьшего квадрата равна всего лишь $1 \times 4 = 4 \text{ см}^2$.

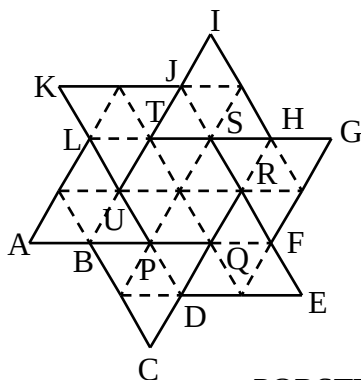
Таким образом, длина стороны наименьшего квадрата равна 2 см.

Ответ: 2 см.

178. На приведенной ниже схеме PQRSTU является правильным шестиугольником с длиной стороны 2 см. Многоугольник ABCDEFGHIJKL получен путем построения равносторонних треугольников с длиной стороны 4 см, из сторон шестиугольника. Найдите соотношение $\frac{S_{ABCDEFGHIJKL}}{S_{PQRSTU}}$.



Решение: Поскольку PQRSTU — правильный шестиугольник со стороной 2 см, а многоугольник ABCDEFGHIJKL получен рисованием равносторонних треугольников со стороной 4 см, то мы можем разделить их на несколько равносторонних треугольников со стороной 2 см, как показано на схеме.



Теперь обратите внимание, что PQRSTU состоит из 6 маленьких равносторонних треугольников, а многоугольник ABCDEFGHIJKL состоит из 30 маленьких равносторонних треугольников. Так $\frac{S_{\text{ABCDEFGHIJKL}}}{S_{\text{PQRSTU}}} = \frac{30}{6} = 5$.

Ответ: 5.

179. Разрежьте куб с помощью двух плоскостей, параллельных основанию куба, на три прямоугольных блока. Отношение площадей поверхностей этих трех блоков равно 3 : 4 : 5. Найдите отношение их объемов.

Решение: Пусть длина каждого ребра данного куба равна 1 единице и предположим, что высоты трех прямоугольных тел равны a, b и c . Тогда общая площадь поверхности трех прямоугольных тел равна $6 + 4 = 10$ единиц квадрата.

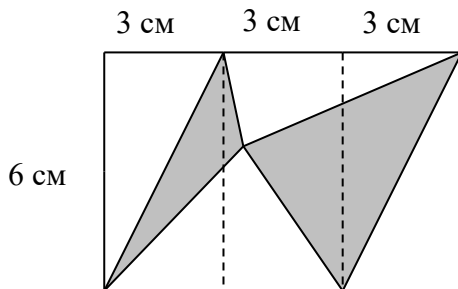
$$\begin{cases} 2 + 4a = \frac{3 \times 10}{3 + 4 + 5} = \frac{30}{12} & (1) \\ 2 + 4b = \frac{4 \times 10}{3 + 4 + 5} = \frac{40}{12} & (2) \\ 2 + 4c = \frac{5 \times 10}{3 + 4 + 5} = \frac{50}{12} & (3) \end{cases}$$

Мы получаем $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{13}{24}$. Таким образом, соотношение объемов трех прямоугольных тел равно

$$a : b : c = \frac{1}{8} : \frac{1}{3} : \frac{13}{24} = 3 : 8 : 13$$

Ответ: $3 : 8 : 13$.

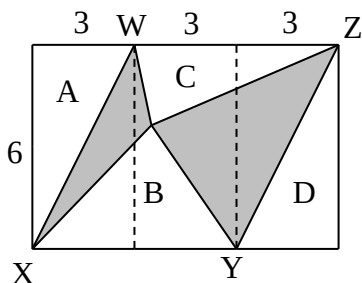
180. На приведённом ниже рисунке три прямоугольника размерами $6 \text{ см} \times 3 \text{ см}$ расположены вместе в ряд. Найдите площадь заштрихованной области в см^2 .



Решение: Незаштрихованная область образована областями А, В, С и D.

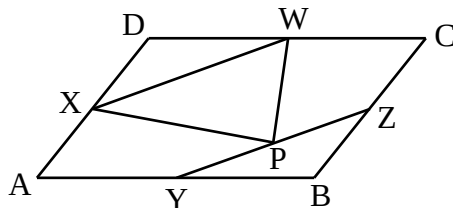
Площадь каждой из областей А и D
равна $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9 \text{ см}^2$, и мы
можем заметить, что сумма
площадей областей В и С
составляет
 $\frac{1}{2} \times (3 + 3) \times 6 = 18 \text{ см}^2$.

Следовательно, площадь
заштрихованной области равна
 $(3 + 3 + 3) \times 6 - 9 - 18 - 9 = 18 \text{ см}^2$



Ответ: 18 см^2 .

181. Точки W, X, Y и Z являются серединами четырех сторон параллелограмма ABCD. Если точка P - точка на отрезке YZ, то какой процент от площади параллелограмма ABCD составляет площадь $\triangle PXW$?



Решение: Соедините XY и WY, как показано на схеме. Поскольку W и X — середины DC и DA соответственно, а Y и Z — середины AB и CB соответственно, то XW параллелен YZ, а XY параллелен WZ, так что $S_{\triangle PXW} = S_{\triangle WXY} = \frac{1}{2} \times S_{WXYZ} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times S_{ABCD} = \frac{1}{4} \times S_{ABCD}$

Следовательно, 25 % площади параллелограмма ABCD занимает $\triangle PXW$.

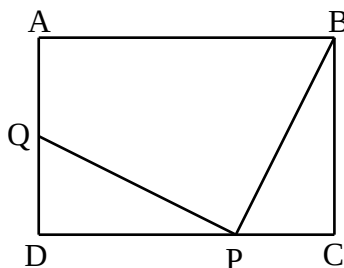
Ответ: 25%.

182. Основание большего треугольника в два раза больше высоты меньшего треугольника, а высота большего треугольника в три раза больше основания меньшего треугольника. Каково отношение площади большего треугольника к площади меньшего треугольника?

Решение: Судя по приведенной информации, площадь большего треугольника в $2 \times 3 = 6$ раз больше площади меньшего треугольника. Следовательно, желаемое соотношение составляет 6:1.

Ответ: 6 : 1.

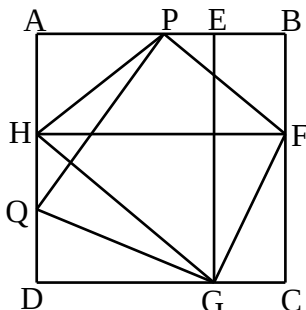
183. Пусть ABCD — прямоугольник такой, что $AD = 8$ см и $CD = 12$ см. Если точка Р находится на CD так, что $DP = AD$ и точка Q находится на AD так, что $DQ = CP$, то какова площадь четырехугольника ABPQ в см^2 ?



Решение: У нас есть $DP = AD = 8$ см и $DQ = CP = CD - DP = 4$ см. Следовательно, площадь $\triangle PDQ$ равна $\frac{1}{2} \times DP \times DQ = 16 \text{ см}^2$, а площадь $\triangle PCB = \frac{1}{2} \times CP \times CB = 16 \text{ см}^2$. Так как площадь прямоугольника ABCD равна $AD \times CD = 96 \text{ см}^2$, то площадь четырехугольника ABPQ будет равна $96 - 16 - 16 = 64 \text{ см}^2$.

Ответ: 64 см^2 .

184. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной 10 см. Точки E, F, G и H находятся на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно, так что EG параллельна AD , а FH параллельна AB . Если P — точка на AE такая, что $PE = 2$ см, а Q — точка на DH такая, что $HQ = 3$ см. Какова площадь четырехугольника $PFGQ$ в см^2 ?



Решение: Обратите внимание, что площадь $\triangle PFH$ равна половине площади прямоугольника $ABFH$, а площадь $\triangle FGH$ равна половине площади прямоугольника $CDHF$, поэтому площадь четырехугольника $PFGH$ равна половине площади квадрата $ABCD$. Отсюда следует, что площадь $PFGH$ равна 50 см^2 . Разница между площадями $PFGH$ и $PFGQ$ равна разнице площадей $\triangle PQH$ и $\triangle GQH$. Эти два треугольника имеют одинаковое основание $HQ = 3$ см. Разница между их высотами $DG - AP = AE - AP = PE = 2$ см. Следовательно, площадь $PFGQ$ равна $50 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 53 \text{ см}^2$.

Ответ: 53 см^2 .

185. Шесть одинаковых пирамид с квадратными основаниями собираются в куб объемом 2744 см^3 ? (см. диаграмму 2). Какова длина OH в см, которая равна высоте от вершины до

квадрата основания ABCD каждой пирамиды? (см. диаграмму 1)

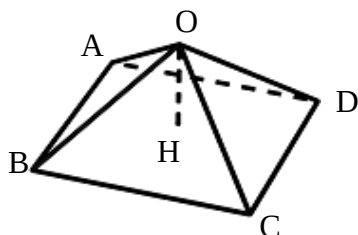


Диаграмма1

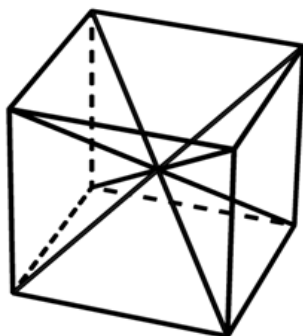
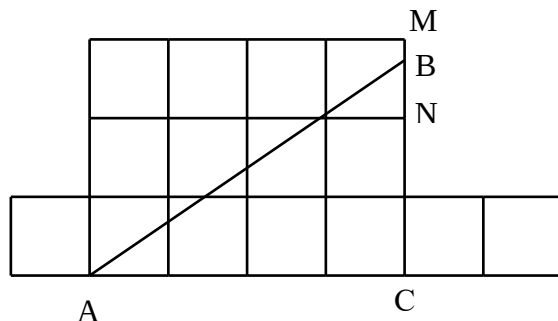


Диаграмма2

Решение: Так как $2744 = 14 \times 14 \times 14$, то каждая сторона основания пирамиды равна 14 см. Но шесть пирамид образуют куб, причем вершина каждой пирамиды находится в центре куба; следовательно, высота от вершины до основания каждой пирамиды равна $14 \div 2 = 7$ см.

Ответ: 7 см.

186. Диаграмма ниже состоит из 15 единичных квадратов. Если АВ делит площадь данной диаграммы на две равные части. Найдите значение $\frac{MB}{BN}$.



Решение: Площадь $\triangle ABC$ равна $7,5 - 2 = 5,5$ квадратов.

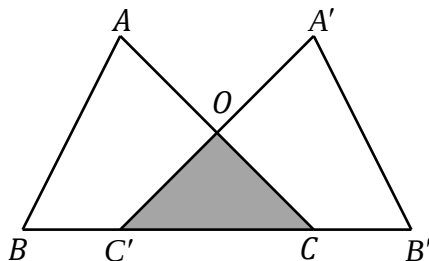
Она также рассчитывается как $\frac{1}{2} \times 4 \times BC$, а значит

$$BC = \frac{11}{4}. \text{ Следовательно, } BN = \frac{11}{4} - 2 = \frac{3}{4}, \text{ } BM = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, значение $\frac{MB}{BN}$ составляет $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

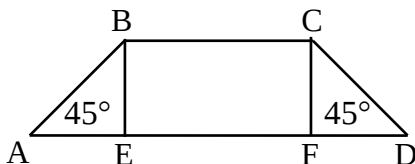
187. В треугольнике ABC $\angle ACB = 45^\circ$ и $BC = 24$ см. Длина высоты от A до BC равна 16 см. Точки B' и C' находятся на линии BC так, что $BC = B'C'$. Предположим $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$, как показано на схеме ниже. Чему равна длина BB' в см, если площадь треугольника OCC' равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC ?



Решение: Площадь $\triangle ABC$ равна $\frac{1}{2} \times 24 \times 16 = 192 \text{ см}^2$, следовательно, площадь $\triangle OCC'$ равна 64 см^2 . Так как $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ равны, то мы знаем, что $\triangle OCC'$ – прямоугольный равнобедренный треугольник, а площадь $\triangle OCC'$ равна $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (C'C)^2 = 64 \text{ см}^2$, поэтому $CC' = 16$ см. Следовательно, $B'B = 24 + 8 = 32$ см.

Ответ: 32 см.

188. Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$, у которой $AD = 16$ см, $BC = 8$ см, $AB = CD$ и $\angle A = \angle D = 45^\circ$.



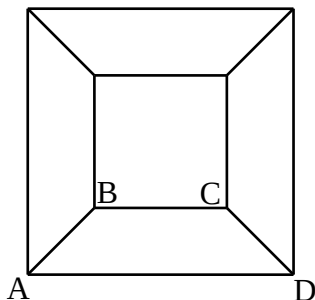
Решение 1: Пусть E и F будут точками на AD такими, что $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$ соответственно, как показано на диаграмме выше.

Обратите внимание что $BE = CF$ и $EF = BC = 8$ см.

Поскольку $\angle A = \angle D = 45^\circ$, $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$, следовательно, $\triangle ABE$ – равнобедренный прямоугольный треугольник и равен $\triangle DCF$. Итак, $AE = DF = BE = CF =$

$= \frac{1}{2}(16 - 8) = 4$ см. Таким образом, площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ равна $\frac{(16+8) \times 4}{2} = 48$ см².

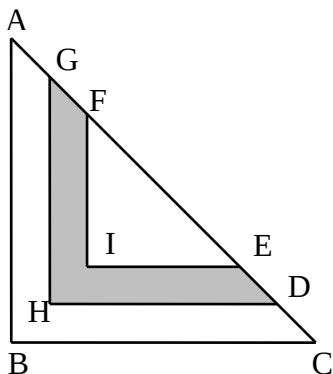
Решение 2: Постройте еще 3 трапеции, идентичные трапеции $ABCD$, чтобы получился квадрат большего размера, внутри которого находится квадрат меньшего размера, как показано на схеме ниже.



Тогда площадь трапеции ABCD составляет всего лишь четверть разницы между двумя квадратами и равна $(16^2 - 8^2) \div 4 = (256 - 64) \div 4 = 48 \text{ см}^2$.

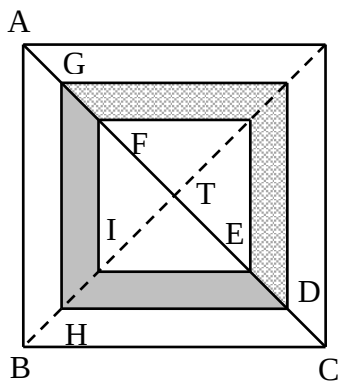
Ответ: 48 см^2 .

189. На схеме ниже ABC, GHD и FIE — равнобедренные прямоугольные треугольники. Если $AG = GF = CD = DE = 1 \text{ см}$ и $FE = 4 \text{ см}$, то каково отношение площади заштрихованной области к площади треугольника ABC?



Решение: Обратите внимание, что $AC = 8 \text{ см}$ и $DG = 6 \text{ см}$.

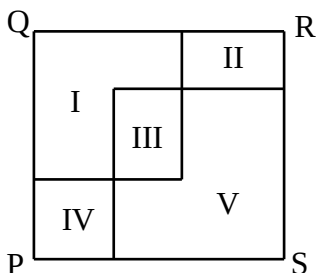
Сделайте еще одну копию фигуры и объедините ее, чтобы получился квадрат. Теперь пусть точка Т будет пересечением диагоналей квадрата, как показано на схеме. Теперь имеем: Дважды площадь заштрихованной области равна разнице площадей среднего квадрата и наименьшего квадрата, то есть $6 \times 6 \div 2 - 4 \times 4 \div 2 = 10 \text{ см}^2$.



Следовательно, отношение площади заштрихованной области к площади $\triangle ABC$ равно
 $10 \div (8 \times 8 \div 2) = 10 : 32 = 5 : 16$.

Ответ: 5 : 16.

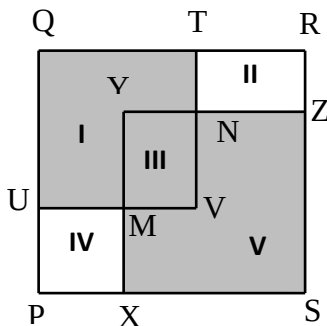
190. Фабрика имеет форму прямоугольника PQRS с PS = 44 м и RS = 40 м. Фабрика разделена на 5 помещений: I, II, III, IV и V, как показано на схеме ниже. Периметры комнат II, III и IV равны. Также известно, что помещения I и III, а также помещения V и III образуют квадрат. Какова сумма периметра в метрах помещений I и V?



Решение: Обозначьте точки, как показано на схеме.

У прямоугольника PQRS выполняются следующие уравнения $PQ + QR = QR + RS = RS + SP$. Теперь наблюдая за QTVU и SXYZ, мы можем заключить, что общая сумма периметров помещений II, III и IV равна периметру PQRS = $2 \times (40 + 44) = 168$ м.

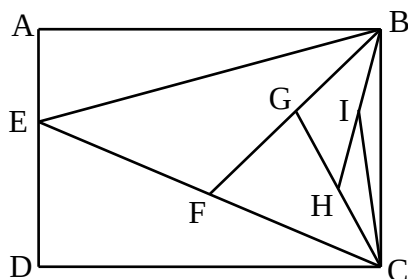
Таким образом, периметр каждого помещения II, III и IV составляет $168 \div 3 = 56$ см. Мы также можем заметить, что периметр многоугольника QUMXSZNT также равен



периметру PQRS, поэтому сумма периметров многоугольника QUMXSZNT и комнаты III равна $168 + 56 = 224$ м, что в точности соответствует сумме периметров комнат I и V.

Ответ: 224 м.

191. На рисунке ниже E - точка на стороне AD прямоугольника ABCD. Точки F, G, H и I - середины сторон CE, BF, CG и BH соответственно.

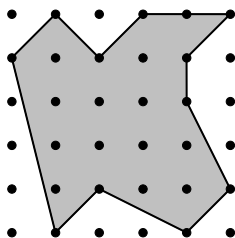


Если площадь треугольника BCI равна 1 см^2 , найдите площадь прямоугольника ABCD в см^2 .

Решение: Поскольку I — середина BH, площадь $\triangle BCH$ равна $1 \times 2 = 2 \text{ см}^2$. Поскольку H — середина CG, площадь $\triangle BGC$ равна $2 \times 2 = 4 \text{ см}^2$. Поскольку G — середина BF, площадь $\triangle BFC$ равна $4 \times 2 = 8 \text{ см}^2$. Поскольку F — середина CE, площадь $\triangle BEC$ равна $8 \times 2 = 16 \text{ см}^2$. Поскольку E — точка на AD, площадь прямоугольника ABCD в два раза больше площади $\triangle BEC$, то есть $16 \times 2 = 32 \text{ см}^2$.

Ответ: 32 см^2 .

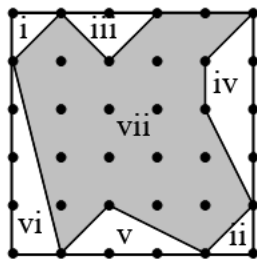
192. На рисунке расстояние между соседними точками в каждой строке и каждом столбце равно 1 см. Какова площадь заштрихованной области в см^2 ?



Решение: Мы рисуем квадрат вокруг данной диаграммы и делим его на 7 областей, как показано справа.

Площадь заштрихованной области (область (vii)) =

= площадь квадрата – сумма площадей областей (i) ... (vi)



$$= 5 \times 5 - \left(\frac{1 \times 1}{2} \times 2 + \frac{2 \times 1}{2} + \frac{(1+4) \times 1}{2} + \frac{3 \times 1}{2} + \frac{4 \times 1}{2} \right) =$$

$$= 25 - 8 = 17 \text{ см}^2$$

Ответ: 17 см^2 .

193. Прямоугольник разделен на 9 частей, как показано на рисунке ниже. Также указаны периметры в см пяти известных частей. Найдите периметр исходного прямоугольника в см.

	a	b	c
d		11	
e	20	8	11
f		12	

Решение: Обозначьте длины сторон, как показано на рисунке.

Обратите внимание, что $a = c + \frac{20-11}{2} = c + \frac{9}{2}$ и

$$f = d + \frac{12-11}{2} = d + \frac{1}{2}.$$

Тогда у нас есть $b + e = \frac{8}{2} = 4$ и $c + e = b + d = \frac{11}{2}$.

А периметр исходного прямоугольника равен:

$$\begin{aligned} 2(a + b + c + d + e + f) &= 2\left(a + f + \frac{11}{2} + \frac{11}{2}\right) = \\ &= 2(a + f + 11) = 2(c + d + 16) \\ (b + d) + (c + e) &= 11, \quad c + d = 11 - (b + e) = 7 \end{aligned}$$

Следовательно, $2(c + d + 16) = 2 \times (7 + 16) = 46$.

Ответ: 46.

194. Цилиндрический резервуар диаметром 2,8 м и высотой 4,2 м заполнен трубой диаметром 7 см, по которой вода течет со скоростью 4 м/с. Сколько минут потребуется, чтобы полностью заполнить резервуар? (примем $\pi = \frac{22}{7}$)

Решение: Так как диаметр цилиндрического резервуара 2,8м, то радиус цилиндрического резервуара равен 1,4 м и,

следовательно, объем цилиндрического резервуара равен $\frac{22}{7} \times 1,4 \times 1,4 \times 4,2 \text{ м}^3$.

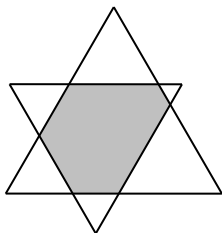
Поскольку диаметр трубы равен 7 см, то радиус трубы равен $\frac{7}{2} \text{ см} = \frac{7}{200} \text{ м}$. Поскольку скорость воды 4 м в секунду, что равно 240 м в минуту, объем воды, сбрасываемой за 1 минуту, равен $\frac{22}{7} \times \frac{7}{200} \times \frac{7}{200} \times 240 \text{ м}^3$.

Таким образом, для полного заполнения бака потребуется следующее количество минут:

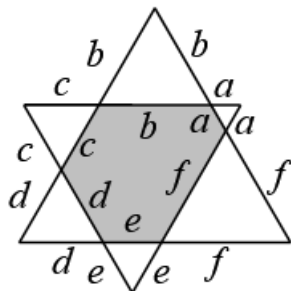
$$\frac{\frac{22}{7} \times 1,4 \times 1,4 \times 4,2}{\frac{22}{7} \times \frac{7}{200} \times \frac{7}{200} \times 240} = 28$$

Ответ: 28.

195. Два равносторонних треугольника, наложенных друг на друга, показаны на рисунке. Стороны каждого треугольника параллельны сторонам другого. Периметры двух треугольников равны 744 см и 930 см соответственно. Каков периметр заштрихованного шестиугольника в см?

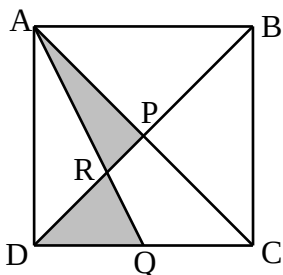


Решение: Все шесть построенных маленьких треугольников являются равносторонними треугольниками. Обозначьте длины сторон, как показано на рисунке. Тогда периметр заштрихованного шестиугольника равен $a + b + c + d + e + f$, а сумма всех сторон шести равносторонних треугольников равна $3(a + b + c + d + e + f)$, что равно $744 + 930 = 1674$. Следовательно, периметр заштрихованного шестиугольника равен $\frac{1674}{3} = 558$ см.



Ответ: 558 см.

196. На рисунке ABCD - квадрат, в котором $AB = 24$ см. Пусть точка Q - середина стороны CD, точка P - точка пересечения диагоналей AC и BD, точка R - точка пересечения отрезков AQ и BD. Найдите сумму площадей, в см^2 , треугольника ARP и треугольника DRQ.

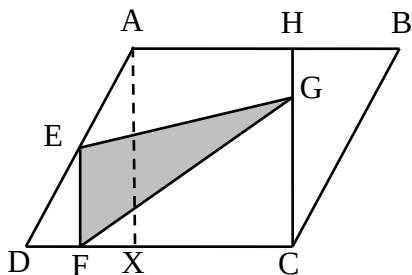


Решение: Площадь ABCD равна $24^2 = 576 \text{ см}^2$, следовательно, площадь $\triangle APB$ составляет четверть площади ABCD, которая равна $\frac{576}{4} = 144 \text{ см}^2$.

Поскольку $AB \parallel DQ$, $\triangle RDQ$ и $\triangle RBA$ подобны. Поскольку Q — середина CD , $\frac{DQ}{AB} = \frac{1}{2}$. Таким образом, высота от вершины R до основания DQ треугольника $\triangle RDQ$ равна $\frac{1}{1+2} \times 24 = 8$ см, а высота от вершины R до основания AB треугольника $\triangle RAB$ равна $\frac{2}{1+2} \times 24 = 16$ см. Следовательно, площадь $\triangle RDQ$ равна $\frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$ см², а площадь $\triangle RAB$ равна $\frac{1}{2} \times 24 \times 16 = 192$ см². Площадь $\triangle RAP = \triangle RAB - \triangle APB = 192 - 144 = 48$ см² и, следовательно, сумма площадей $\triangle ARP$ и $\triangle DRQ$ равна $48 + 48 = 96$ см².

Ответ: 96 см².

197. В параллелограмме $ABCD$ точка E лежит на AD так, что $AE = DE$, точка F лежит на CD , а точка H лежит на AB так, что $EF \perp DC$ и $CH \perp AB$. Пусть $AH : HB = 3 : 2$ и точка G лежит на прямой CH . Если площадь треугольника EFG равна 296 см², найдите площадь параллелограмма $ABCD$ в см².



Решение: Проведем CE . Обратите внимание, что $EF \parallel HC$. Пусть G — движущаяся точка на CH и расстояние между EF и CH фиксировано, поэтому площадь $\triangle EFG$ равна площади $\triangle EFC$. Пусть X на CD , так что $AX \perp DC$.

Ответ: 1480 см^2 .

A diagram of a composite figure. It consists of a large rectangle with a smaller rectangle attached to its top-right side. The top edge of the large rectangle is labeled 8 cm. The vertical edge of the smaller rectangle is labeled 2 cm. The left vertical edge of the large rectangle is labeled 5 cm.

255

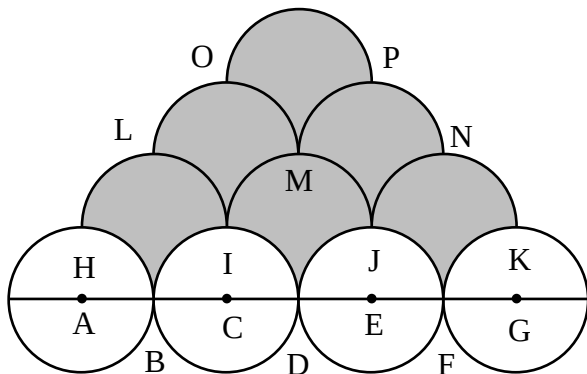
$$(MA+AK+KB+BN)+AG+(HL+KL)+(NC+CD)+(DE+EP)+P$$

$$M= MN+AG+KH+ND+DP+PM=8+2+2+5+8+5=30.$$

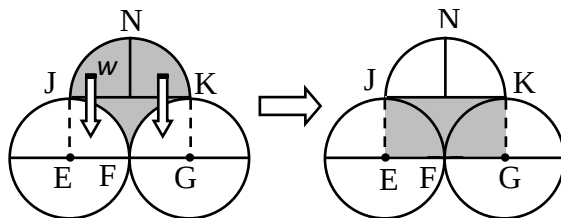
Ответ: 30.

199. Десять круглых карточек радиусом 2 см каждая располагаются, как показано на схеме.

Учитывая, что четыре коллинеарные точки А, С, Е и G являются центрами белых карт, а АНІС, СІJE, EJKG и COPE — прямоугольниками, а BLMD и DMNF — квадратами, какова площадь заштрихованной области в см²?



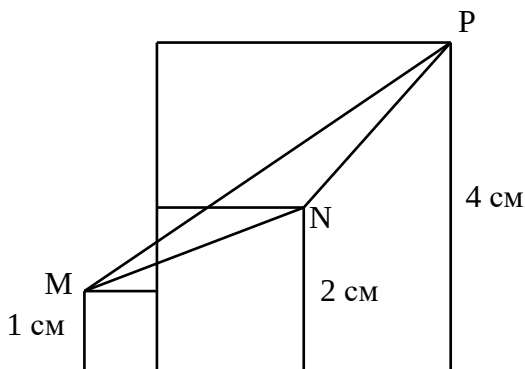
Решение: Площадь серой части равна 6-кратной площади серой части последнего правого круга (обозначается (w)), который содержит 4 точки NJFK. Так как площадь части (w) выше диаметра JK равна площади половины круга и равна сумме площадей частей, ограниченных JEF и KFG двух нижних кругов.



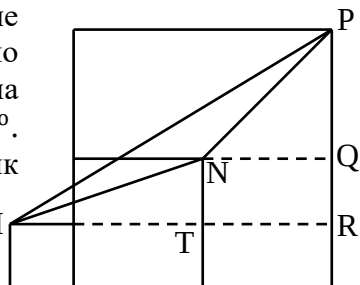
Следовательно, серая часть (w) имеет площадь, равную площади прямоугольника $EJKG$ и равную $2 \times 4 = 8 \text{ см}^2$. Тогда площадь серой части равна $6 \times 8 = 48 \text{ см}^2$.

Ответ: 48 см^2 .

200. На схеме ниже представлены 3 квадрата, длина сторон которых составляет 1 см, 2 см и 4 см соответственно. Какова площадь треугольника MNP в см^2 ?



Решение: Нарисуйте дополнительные сегменты линий (представленные пунктирными линиями), как показано на схеме справа, где М, Т и R лежат на одной прямой и $\angle NQP = \angle MRP = 90^\circ$. Обратите внимание, что треугольник MPR образован треугольниками MNP, MNT, NPQ и



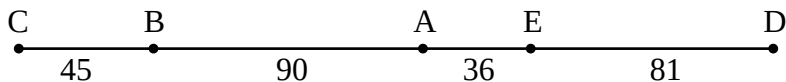
прямоугольником NQRT. Итак, площадь треугольника MNP равна

$$\frac{3 \times 5}{2} - \frac{3 \times 1}{2} - \frac{2 \times 2}{2} - 1 \times 2 = 2 \text{ см}^2$$

Ответ: 2 см^2 .

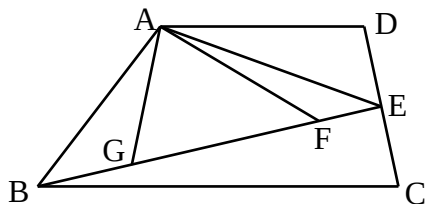
201. Пять точек А, В, С, D и Е находятся на плоскости так, что $AB = 90 \text{ см}$, $BC = 45 \text{ см}$, $CD = 252 \text{ см}$, $DE = 81 \text{ см}$, $EA = 36 \text{ см}$. Чему равна длина СЕ в см?

Решение: Поскольку $45 + 90 + 36 + 81 = 252 \text{ см}$, значит пять точек лежат на одной прямой в порядке С, В, А, Е и D. Следовательно, $CE = CD - DE = 171 \text{ см}$.



Ответ: 171 см .

202. На приведенном ниже чертеже ABCD — трапеция, а Е — средняя точка DC. Площади треугольников ABG, ABF и AGE составляют 15 см^2 , 45 см^2 и 60 см^2 соответственно. Какова площадь (в см^2) трапеции ABCD?



Решение: Обозначим через $[X]$ площадь многоугольника, а h – высоту трапеции. У нас есть $[ABE] = [ABG] + [AGE] = 75 \text{ см}^2$. Заметим, что расстояния от E до AD и BC равны и равны половине высоты трапеции. Поэтому,

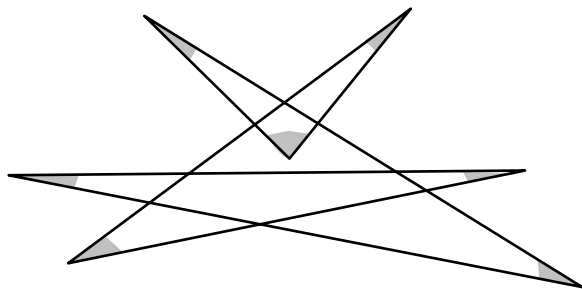
$$[ABCD] - [ABE] = [ADE] + [BDE] = \frac{h(AD + BC)}{4} = \frac{S}{2}$$

где S – площадь трапеции.

Следовательно, $[ABCD] = 2[ABE] = 150 \text{ см}^2$.

Ответ: 150 см^2 .

206. Найдите сумму всех заштрихованных углов в градусах на диаграмме, изображенной ниже.



Решение: Обозначьте углы, как показано на рисунке справа.

По свойству внешнего угла

имеем $\angle G + \angle E = \angle DQS$,

$\angle F + \angle H = \angle DSQ$,

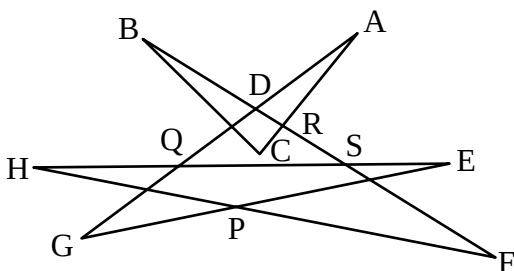
$\angle C + \angle B = \angle ARD$ и

$\angle DQS + \angle DSQ = \angle ADR$.

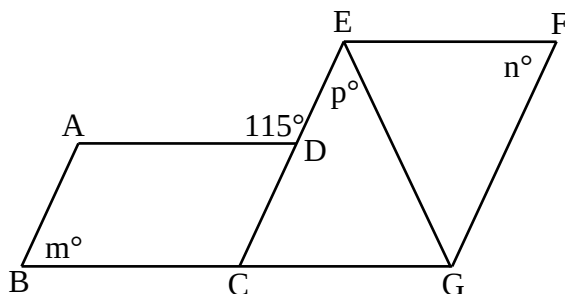
Сложив правые и левые части уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C + \angle F + \angle G + \angle E + \angle H &= \angle DQS + \angle DSQ + \\ &+ \angle ARD + \angle A = \angle ADR + \angle ARD + \angle A = 180^\circ \end{aligned}$$

Ответ: 180° .



207. На рисунке ниже ABCD и CEFG — параллелограммы, где BCG — прямая, а $\angle ADE = 115^\circ$. Если $EG = FG$, найдите значение $m + n$.



Решение:

Обратите внимание что $\angle ADC = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

Поскольку ABCD — параллелограмм, $m^\circ = \angle ADC = 65^\circ$.

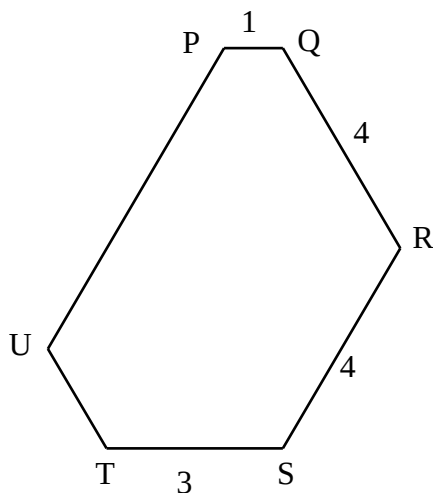
Поскольку, $AB \parallel CD$ и CEFG — параллелограмм,

$\angle ABC = \angle DCG = \angle EFG$, т.е. $n^\circ = 65^\circ$.

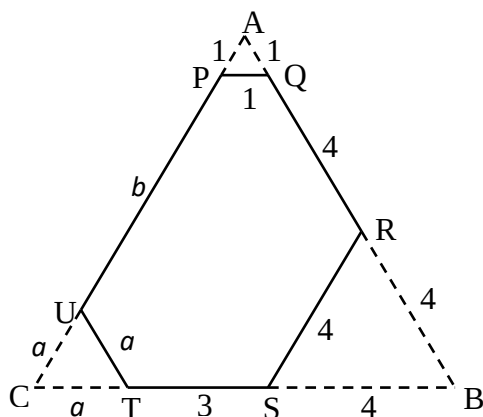
Так как $EG = FG$, значит треугольник FEG равнобедренный, и углы при основании будут равны: $\angle FEG = \angle EFG = 65^\circ$.
 Так как $AD \parallel BC \parallel EF$, то $\angle CEF = \angle ADE = 115^\circ$
 Так $p^\circ = \angle CEG = \angle CEF - \angle FEG = 115^\circ - 65^\circ = 50^\circ$.
 Таким образом, $m^\circ + n^\circ + p^\circ = 65^\circ + 65^\circ + 50^\circ = 180^\circ$.

Ответ: 180° .

208. На приведенном ниже рисунке каждый из внутренних углов шестиугольника $PQRSTU$ равен 120° . Учитывая, что $PQ = 1$ см, $QR = RS = 4$ см и $ST = 3$ см. Найдите периметр шестиугольника $PQRSTU$ в см.



Решение: Предположим $UT = a$ см и $PU = b$ см. Вытяните линии PU , QR и ST с обеих сторон, как показано ниже на рисунке.



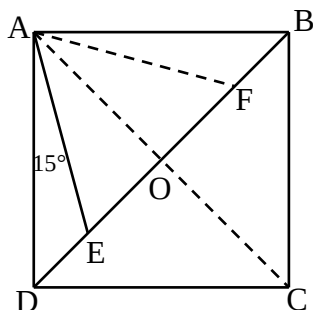
Пусть прямые PU и QR пересекаются в точке A , прямые QR и ST пересекаются в точке B , а прямые ST и PU пересекаются в точке C .

Поскольку каждый из внутренних углов шестиугольника $PQRSTU$ равен 120° , мы знаем, что треугольники ABC , APQ , RBS и UTC являются равносторонними треугольниками. Таким образом, $RB = BS = RS = 4$ см, $AQ = AP = PQ = 1$ см, $UC = CT = UT = a$ см и $AC = BC = AB$.

От $AB = 1 + 4 + 4 = 9$, у нас есть $1 + a + b = a + 3 + 4 = 9$. Итак, $a = 2$ и следовательно, $b = 6$. Следовательно, периметр шестиугольника $PQRSTU$ равен $2 + 6 + 1 + 4 + 4 + 3 = 20$ см.

Ответ: 20 см.

209. На приведенной ниже диаграмме $ABCD$ является квадратом, а точка E находится на BD таким образом, что $\angle EAD = 15^\circ$. Чему равно $\frac{BD-AE}{DE}$?

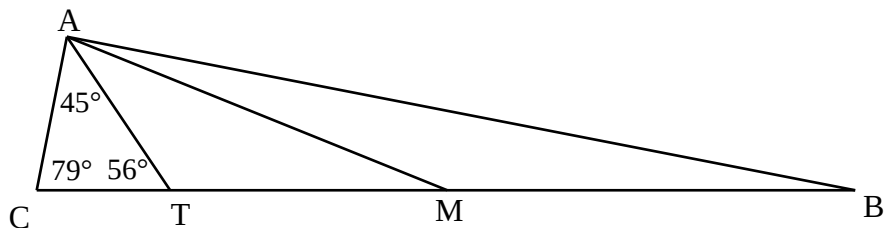


Решение: Подключите пунктирные прямые, как показано на схеме. Пусть O — пересечение AC и BD . Пусть F симметричен E относительно O . Мы видим, что равнобедренный треугольник AEF является равносторонним треугольником (так как угол A равен 60°). Поэтому:

$$\frac{BD - AE}{DE} = \frac{BD - EF}{DE} = \frac{DE + BF}{DE} = 2$$

Ответ: 2.

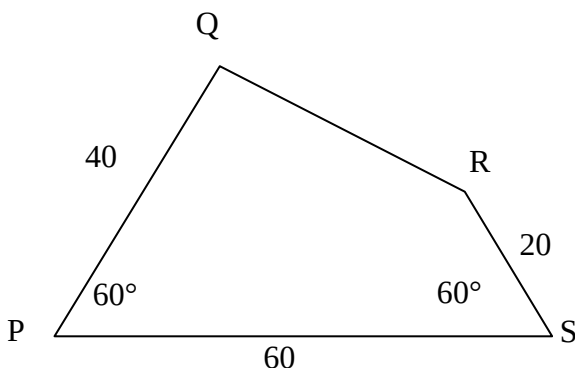
210. В треугольнике ABC точка M является серединой BC , $AM = CM$, $\angle ATC = 56^\circ$ и AT биссектриса $\angle BAC$, как показано на рисунке ниже. Какова величина угла $\angle AMB$ в градусах?



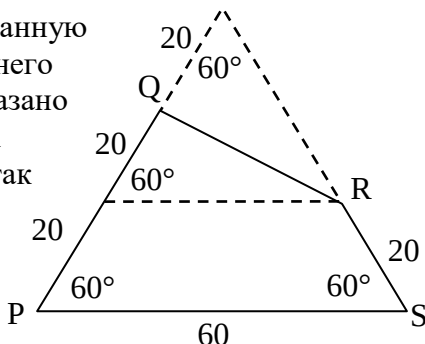
Решение: Поскольку $AM = CM = MB$, M — центр окружности, проходящей через A , B и C . Таким образом, BC — диаметр и $\angle BAC = 90^\circ$ (угол в полукруге). Далее, поскольку AT делит $\angle BAC$ пополам, имеем $\angle CAT = 45^\circ$. Мы это знаем $\angle ACT = 180^\circ - 45^\circ - 56^\circ = 79^\circ$ и $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 79^\circ = 11^\circ$. Поскольку $AM = BM = CM$, у нас есть $\angle CAM = 79^\circ$ и $\angle BAM = 11^\circ$. Так $\angle AMB = 2\angle ACM = 2 \times 79^\circ = 158^\circ$ или $\angle AMB = 180^\circ - 2 \times 11^\circ = 158^\circ$.

Ответ: 158° .

211. Четыре стержня соединены между собой гибкими шарнирами образуя четырехугольник PQRS, как показано на рисунке ниже. Если $\angle QPS = \angle RSP = 60^\circ$, $PQ = 40$ см, $RS = 20$ см и $PS = 60$ см, то какова мера в градусах для $\angle QRS$?



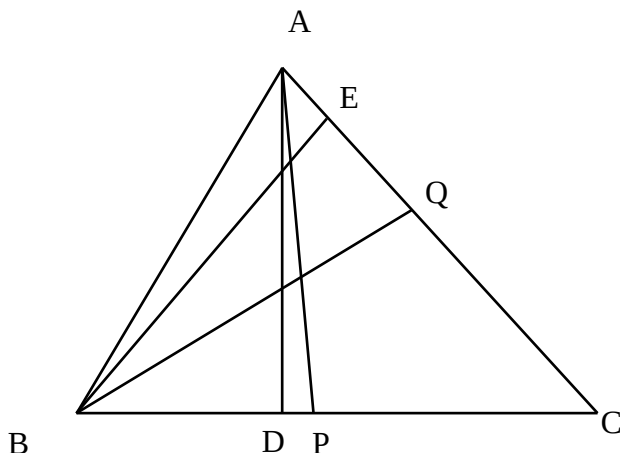
Решение: Расширьте данную схему до равностороннего треугольника, как показано на рисунке справа. QR является медианой, а так же высотой и биссектрисой равностороннего треугольника, значит $\angle PQR = 90^\circ$. Следовательно,



$$\angle QRS = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 150^\circ$$

Ответ: 150° .

212. В треугольнике ABC известно, что AD и BE — высоты, а AP и BQ — биссектрисы в точках A и B, где P и Q лежат на CD и CE соответственно. Если $\angle PAD = 6^\circ$ и $\angle QBE = 18^\circ$, какова величина угла $\angle BCA$ в градусах?



Решение: У нас есть

$$90^\circ = \angle ADB = \angle BCA + \angle CAD = \angle BCA + \frac{1}{2} \angle CAB + 6^\circ$$

Аналогично, у нас тоже есть $90^\circ = \angle BCA + \frac{1}{2} \angle ABC + 18^\circ$.

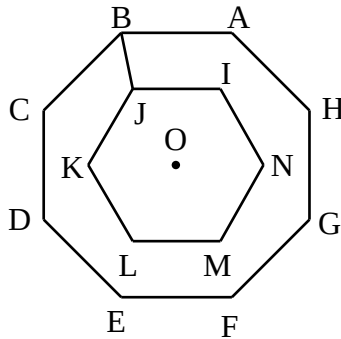
Следовательно, $180^\circ = 2\angle BCA + \frac{1}{2} \angle CAB + \frac{1}{2} \angle ABC + 24^\circ$.

Отсюда следует, что $\frac{3}{2} \angle BCA = 180^\circ - 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$,

так что $\angle BCA = 44^\circ$.

Ответ: 44° .

213. На рисунке ниже правильный восьмиугольник ABCDEFGH и правильный шестиугольник IJKLMN оба имеют центры в точке O, так что $AB \parallel IJ$. Если мера $\angle CBJ = 56^\circ$, то какова мера $\angle BJK$ в градусах?



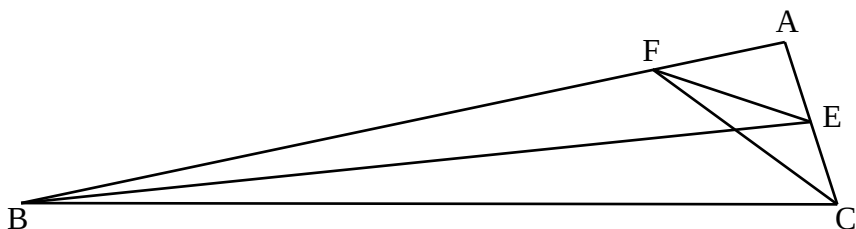
Решение: В правильном восьмиугольнике каждый внутренний угол имеет угловую меру $180^\circ - \frac{360^\circ}{8} = 135^\circ$. Так, $\angle ABJ = 135^\circ - \angle CBJ = 135^\circ - 56^\circ = 79^\circ$.

Потому что $AB \parallel IJ$, а значит $\angle ABJ + \angle BJI = 180^\circ$, имеем $\angle BJI = 180^\circ - 79^\circ = 101^\circ$. Обратите внимание, что $\angle IJK$ это внутренний угол правильного шестиугольника, поэтому $\angle IJK = 120^\circ$.

Таким образом, $\angle BJK = 360^\circ - \angle BJI - \angle IJK = 360^\circ - 101^\circ - 120^\circ = 139^\circ$.

Ответ: 139° .

214. В треугольнике ABC биссектрисы $\angle B$ и $\angle C$ пересекают CA в точке E и AB в точке F соответственно. Если $\angle BEF = 24^\circ$ и $\angle CFE = 18^\circ$, какова величина угла $\angle CAB$ в градусах?



Решение:

Мы имеем,

$$\begin{aligned}
 18^\circ = \angle CFE &= \angle CFA - \angle EFA = \\
 &= (\angle ABC + \angle FCB) - (\angle EBF + \angle BEF) = \\
 &= (\angle ABC - \angle EBF) + (\angle FCB - 24^\circ) = \\
 &= \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle BCA - 24^\circ = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle CAB) - 24^\circ
 \end{aligned}$$

Следует, что $\angle CAB = 180^\circ - 2(18^\circ + 24^\circ) = 96^\circ$.

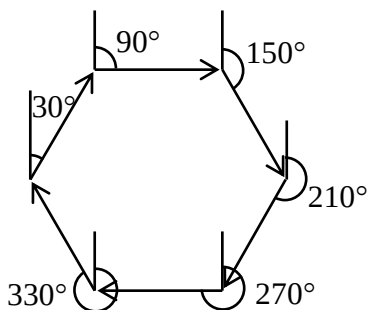
Ответ: 96° .

215. Изначально робот смотрит на север. Всякий раз, когда он перестает двигаться, он автоматически поворачивается лицом на север. Он запрограммирован на выполнение следующих действий:

- (1) Поверните на 30° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.
- (2) Поверните на 90° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.
- (3) Поверните на 150° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.
- (4) Поверните на 210° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.
- (5) Поверните на 270° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.
- (6) Поверните на 330° направо, пройдите 1 км вперед и остановитесь.

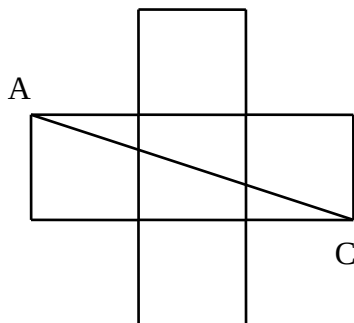
Каково расстояние между начальным и конечным положением робота?

Решение: Обратите внимание, что на каждой остановке робот поворачивается на 60° по часовой стрелке от последней линии движения, где он движется по периметру правильного шестиугольника, и оказывается там, где начал. Таким образом, искомое расстояние равно 0 км.



Ответ: 0 км.

217. На рисунке ниже найдите площадь в см^2 креста, образованного из пяти одинаковых квадратов, учитывая, что длина AC равна 12 см.



Решение: Пусть длина стороны квадрата равна a , тогда площадь креста равна $5a^2$.

По теореме Пифагора имеем:

$$(3a)^2 + a^2 = 10a^2 = 12a^2 = 144.$$

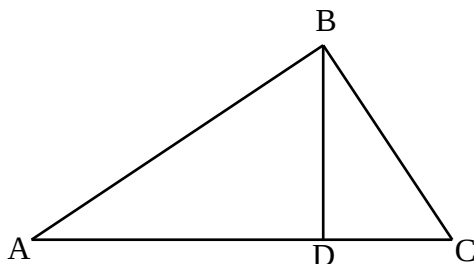
Следовательно, площадь креста равна:

$$5a^2 = \frac{1}{2} \times 144 = 72 \text{ см}^2.$$

Ответ: 72 см^2 .

218. На диаграмме ниже угол ABC равен углу BDC и равен 90° .

Если $\frac{AD}{DC} = \frac{9}{4}$, тогда каково значение $\frac{BD}{AC}$?



Решение: Берем $AD = 9$ и $DC = 4$. Обратите внимание, что $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ и $\triangle BDC$ — прямоугольные треугольники. Применяя теорему Пифагора, имеем $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AD^2 + BD^2 = AB^2$ и $BD^2 + CD^2 = BC^2$.

Поскольку

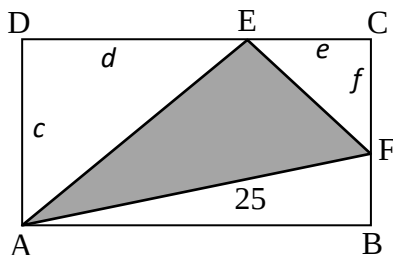
$$AC^2 = 169 = (81 + BD^2) + (BD^2 + 16) = 97 + 2BD^2,$$

мы можем получить $BD^2 = 36$, $BD = 6$. Таким образом,

$$\frac{BD}{AC} = \frac{6}{4 + 9} = \frac{6}{13}$$

Ответ: $\frac{6}{13}$.

219. На рисунке ниже изображен прямоугольник $ABCD$, где E находится на CD , а F на BC , так что $\angle AEF = 90^\circ$ и $AF = 25$ см. Если длины DE , EC , CF , FB , AE и EF — целые положительные числа, какова площадь в см^2 прямоугольника $ABCD$?



Решение:

Используя теорему Пифагора, $a^2 + b^2 = 25^2 = 625$. Если $a > b$, и поскольку они оба должны быть положительными целыми числами, то возможны следующие варианты,

$a = 20, b = 15$ или $a = 24, b = 7$.

Теперь, снова применив теорему Пифагора, если $a^2 = 24^2 = 576 = c^2 + d^2$, невозможно, чтобы c и d были одновременно положительными целыми числами.

Отсюда $a = 20$ и $c^2 + d^2 = 400$. Если $d > c$, то $d = 16$, $c = 12$. Поскольку $b = 15$ и $e^2 + f^2 = 225$, возможные значения $e = 12, f = 9$ или $e = 9, f = 12$.

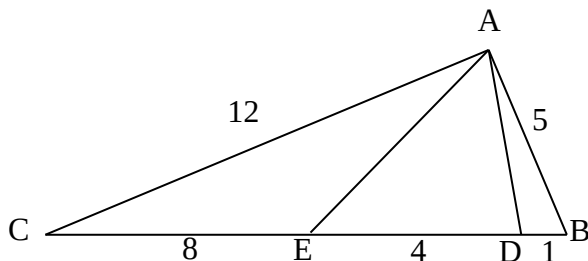
Но поскольку $d + e \geq 16 + 9 = 25 = AF$, что невозможно. Следовательно, $d = 12, c = 16$.

Если $e = 9, f = 12$, то $(12 + 9)^2 + (16 - 12)^2 \neq 25^2$, что невозможно.

Следовательно, $e = 12, f = 9, (12 + 12)^2 + 7^2 = 25^2$, что удовлетворяет заданным условиям. Следовательно, площадь прямоугольника равна $24 \times 16 = 384 \text{ см}^2$.

Ответ: 384 см^2 .

220. На рисунке $AB = 5 \text{ см}$, $AC = 12 \text{ см}$, $DB = 1 \text{ см}$, $ED = 4 \text{ см}$ и $CE = 8 \text{ см}$. Какова величина угла EAD в градусах?



Решение:

Поскольку $BC = BD + DE + EC = 1 + 4 + 8 = 13$ см и $12^2 + 5^2 = 13^2$, мы можем сказать, что $\angle CAB = 90^\circ$.

$$CD = DE + EC = 4 + 8 = 12 = AC,$$

$$\angle CAE + \angle EAD = \angle CAD = \angle ADE.$$

$$BE = BD + DE = 1 + 4 = 5 = AB,$$

$$\angle EAD + \angle DAB = \angle EAB = \angle AED.$$

$$180^\circ = \angle EAD + \angle AED + \angle ADE =$$

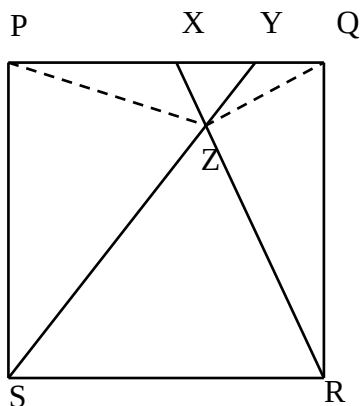
$$= \angle EAD + \angle EAD + \angle DAB + \angle CAE + \angle EAD =$$

$$= \angle EAD + \angle CAB + \angle EAD = 90^\circ + 2\angle EAD$$

Итак, угловая мера $\angle EAD = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

222. Квадрат PQRS имеет площадь 400 см^2 . Точки X и Y делят PQ на 3 части. Найдите площадь $\triangle XYZ$ в см^2 , если периметр $\triangle XYZ$ равен $\frac{1}{4}$ периметра $\triangle SRZ$.

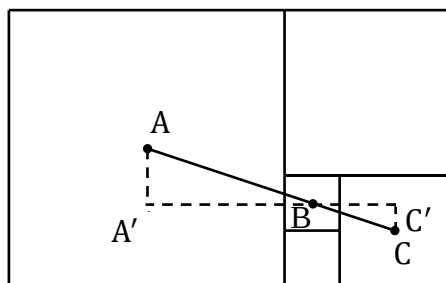


Решение: Известно, что $\triangle XYZ$ и $\triangle RSZ$ подобны. Так как $400 = 20^2$, то длина стороны квадрата PQRS равна 20 см. Поскольку периметр $\triangle XYZ$ равен $\frac{1}{4}$ периметру $\triangle SRZ$,

$XY = \frac{1}{4} \times SR = 5$ см, а высота $\triangle XYZ$ равна $\frac{1}{4}$ высоте $\triangle SRZ$ или $\frac{1}{5}$ стороне квадрата, то площадь $\triangle XYZ$ равна $\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{1}{5} \times 20 = 10$ см².

Ответ: 10 см².

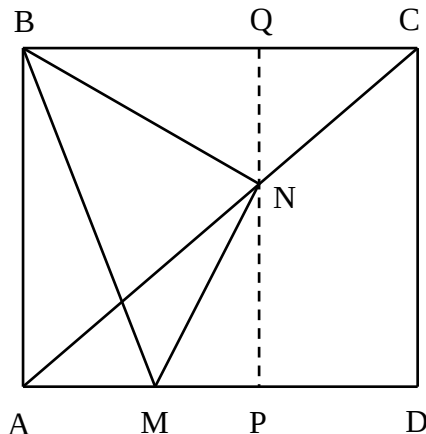
223. Приведенная ниже диаграмма состоит из пяти квадратов со сторонами длиной 1, 1, 2, 3 и 5 соответственно. Центры A, B и C трех квадратов лежат на прямой линии, как показано на рисунке. Каково отношение BC к AB?



Решение: Горизонтальное расстояние между A и B равно $A'B = \frac{5+1}{2} = 3$, а расстояние между B и C равно $BC' = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$. Поскольку первое в два раза длиннее второго, отсюда следует, что AB в два раза длиннее BC по подобию треугольников.

Ответ: 1 : 2.

224. Дан прямоугольник $ABCD$ такой, что $BC = 30$ см и $AB = 25$ см. M — точка на AD такая, что $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$, а N — точка на диагонали AC такая, что $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{5}$, какова площадь $\triangle BMN$ в см^2 ?



Решение: Проведите линию через N параллельно AB , которая пересекает AD и BC в точках P и Q соответственно. Отсюда обратите внимание, что $\triangle ACD$ и $\triangle ANP$ подобны. Следовательно, $\frac{AP}{AD} = \frac{AN}{AC} = \frac{NP}{CD}$.

Таким образом, $BQ = AP = AD \times \frac{3}{5} = 18$ см и

$NP = CD \times \frac{3}{5} = 15$ см, так что $NQ = PQ - NP = 10$ см.

Также $AM = AD \div 3 = 10$ см, так что $MP = AP - AM = 8$ см. Площадь прямоугольника $ABQP$ равна $25 \times 18 = 450 \text{ см}^2$.

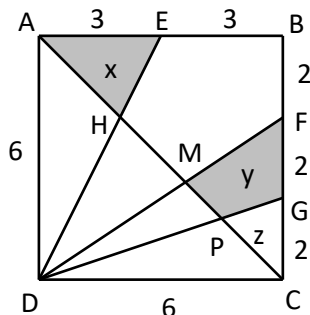
Теперь площади треугольников ABM , NPM и NQB равны $\frac{1}{2} \times AB \times AM = 125 \text{ см}^2$, $\frac{1}{2} \times MP \times NP = 60 \text{ см}^2$

и $\frac{1}{2} \times NQ \times BQ = 90 \text{ см}^2$ соответственно.

Отсюда следует, что площадь $\triangle BMN$ равна $450 - 125 - 60 - 90 = 175 \text{ см}^2$.

Ответ: 175 см^2 .

225. На рисунке ниже изображен квадрат ABCD со стороной 6 см. Учитывая, что E — середина AB, а точки F и G лежат на BC так, что $BF = FG = GC$. Какова общая площадь заштрихованной области в см^2 ?



Решение: Пусть диагональ AC пересекает DE, DF и DG в точках H, M и P соответственно. Предположим, что площадь $\triangle PGC$ равна $z \text{ см}^2$.

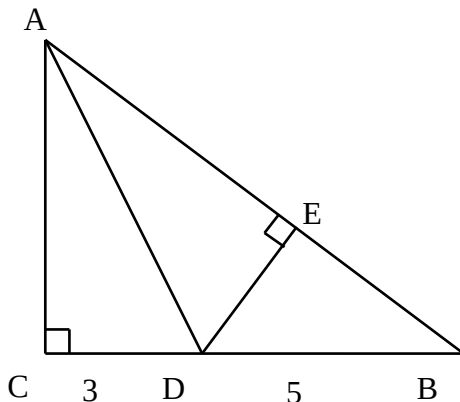
- 1) Поскольку $\triangle AЕН$ подобен $\triangle DСН$, высота $\triangle AЕН$ равна $\frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ см}$. Теперь мы можем получить площадь x , которая равна $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 \text{ см}^2$.
- 2) Поскольку $\triangle FМС$ подобен $\triangle DМА$, высота $\triangle FМС$ равна $\frac{2}{5} \times 6 = \frac{12}{5} \text{ см}$. Теперь мы можем получить площадь $y + z = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} \text{ см}^2$.
- 3) Поскольку $\triangle GРС$ подобен $\triangle DРА$, высота $\triangle GРС$ равна $\frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2} \text{ см}$. Теперь мы можем получить площадь z , которая равна $\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ см}^2$.

Следовательно, мы можем получить площадь

$$y = \frac{24}{5} - \frac{3}{2} = \frac{33}{10}, \text{ а общая площадь заштрихованной области равна } 3 + \frac{33}{10} = \frac{63}{10} \text{ см}^2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{63}{10} = 6,3 \text{ см}^2.$$

226. На рисунке ниже ABC — прямоугольный треугольник, где $\angle C = 90^\circ$. Биссектриса угла $\angle A$ пересекает CB в точке D . Если $CD = 3$ см и $BD = 5$ см, какова длина AB в см?



Решение: Из D нарисуйте $DE \perp AB$, пересекающую AB в точке E . Когда складываем плоскость вверх, $\triangle CAD$ лежит вдоль прямой AD , тогда C совпадает с E , поэтому $AC = AE$ и $CD = DE = 3$.

Применяя теорему Пифагора к треугольнику BED ,

$$BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Поскольку $\triangle DBE$ подобен $\triangle ABC$, следовательно,

$$\frac{DB}{AB} = \frac{5}{AB} = \frac{EB}{CB} = \frac{4}{3 + 5} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, длина AB равна 10 см.

Ответ: 10 см.